

# Aplicaciones de un modelo borroso para el cálculo de puntos de equilibrio

*Arturo Aguilar Vázquez*<sup>\*</sup>  
*Jesús Lechuga Montenegro*<sup>\*\*</sup>  
*Oralia Peña García*<sup>\*\*\*</sup>

## Introducción

Las tendencias actuales en diseño e implementación de sistemas han llegado a conformar un conjunto de herramientas tanto teóricas como metodológicas, conocidas genéricamente como nuevas tecnologías, entre las cuales destacan: sistemas borrosos, algoritmos genéticos, programación evolutiva, agentes inteligentes; incluso algunas neotecnologías híbridas como redes neuronales borrosas, sistemas borrosos genéticos, agentes inteligentes borrosos, etc. La neotecnología se caracteriza básicamente por explotar en gran medida el concepto de las relaciones existentes entre diversas variables de interés. Una vez que se ha formulado una relación entre dos variables  $U$  y  $V$ , ésta puede ser empleada para obtener el valor de la llamada variable dependiente  $V$  suponiendo que se conoce el valor de la variable independiente  $U$ . Es decir que, si hemos identificado una relación funcional  $f$ ,  $V=f(U)$ , entonces al ocurrir un cierto valor  $U^*$ , podemos obtener el correspondiente valor para  $V$ ,  $V^*=f(U^*)$ . En algunas situaciones es posible que, en vez de conocer el valor de una variable independiente  $U$ , se puede tener otra relación  $g$  entre las variables  $U$  y  $V$ , es decir:  $V=g(U)$ , y se pretende encontrar una solución que simultáneamente resuelva ambas ecuaciones. Un ejemplo de esto sería encontrar la solución de las dos ecuaciones lineales: siguientes:  $y=x-7$ ,  $y=5-x$ .

<sup>\*</sup> Profesor del Departamento de Sistemas de la UAM–Azcapotzalco

<sup>\*\*</sup> Profesor-Investigador del Departamento de Economía de la UAM–Azcapotzalco.

<sup>\*\*\*</sup> Coordinación de Servicios Educativos, ENEP–Acatlán.

Los modelos de sistemas borrosos consisten en la extensión del concepto de relación convencional al de relación borrosa que ha demostrado ser una herramienta sumamente útil para el modelaje de relaciones lineales (Aguilar-Romero, 2000), relaciones no lineales complejas entre las variables involucradas en una situación de interés (Yager-Filev, 1994), así como en el modelaje de sistemas de control inteligente (Yager *et al.*, 1995).

Al emplear esta tecnología se modela una relación compleja empleando una base de reglas  $\{R_i\}$  en la cual cada regla  $R_i$  representa una parte de la relación completa y se define de la manera siguiente:

*Si  $U \in A_i$  entonces  $V \in B_i$ , donde  $A_i \subset X$  y  $B_i \subset Y$  son subconjuntos borrosos.*

Una vez que se ha construido un modelo borroso podemos emplearlo para, dado un cierto valor para la variable de entrada  $U$ , determinar la variable de salida  $V$ . Esta determinación se logra al usar un algoritmo de inferencia borrosa.

En este trabajo se considera una extensión del empleo de la tecnología del modelaje de sistemas borrosos, caso en el cual, más que conocer el valor de una variable de entrada  $U$ , se tienen otras relaciones entre las variables, las que pueden definir otro modelo borroso, y se desea encontrar la solución simultánea de estos dos modelos. Se muestra específicamente este análisis considerando el problema clásico de equilibrio en Economía, en el cual se tienen dos relaciones: la primera es la relación precio-oferta y la segunda la relación precio-demanda; el problema entonces consiste en, dado un determinado bien, encontrar el valor del precio para el cual la oferta es igual a la demanda.

La sección siguiente se inicia con los conceptos básicos de conjunto borroso y de relación borrosa, se resume la tecnología empleada en el modelaje de sistemas borrosos, y el proceso de inferencia para determinar el nivel de salida  $V$ , dado un cierto nivel borroso de entrada  $U$ . Así como el proceso de *desborrosamiento* para determinar el valor de salida  $V$ , cuando los subconjuntos borrosos que caracterizan a  $U$  tienen funciones de pertenencia triangular-trapezoidal sobre  $X \subset \Sigma$ .

Posteriormente, se describe el contexto específico del modelaje en Economía cuando se considera el problema de encontrar los puntos de equilibrio, desde la perspectiva del modelaje de sistemas borrosos, específicamente al modelar la relación borrosa precio-oferta. Finalmente, se estudia la solución simultánea del modelo borroso propuesto para el cálculo de los puntos de equilibrio, suponiendo una relación borrosa precio-oferta y una relación precio-demanda lineal no borro-

sa, inicialmente, y luego ésta se supone totalmente borrosa. Se desarrollan dos aplicaciones específicas y se comentan los resultados obtenidos.

## 1. Modelaje de sistemas borrosos

### Definición 1. Conjunto borroso

Sea  $X$  un espacio de puntos (objetos), con un elemento genérico de  $X$  denotado como  $x$ . Es decir que,  $X=\{x\}$ . Se define un conjunto borroso  $A$  en  $X$  por medio de una función de pertenencia (también llamado *membresía*)  $\mu_A$  definida como  $\mu_A:A \rightarrow [0, 1]$ .

En este caso, al valor  $\mu_A(x) \in [0, 1]$  se le denomina nivel de pertenencia de  $x$  en  $A$ .

### Definición 2. Relación borrosa

Dados dos conjuntos  $X$  y  $Y$ , una relación borrosa  $\Sigma$  es un mapeo (o función) definido sobre el producto cartesiano  $X \times Y$  hacia el intervalo cerrado  $[0, 1]$ . La magnitud del mapeo está expresado por medio de la llamada función de pertenencia (o membresía)  $\mu_\Sigma$  tal que:

$$\mu_\Sigma : (X \times Y) \rightarrow [0, 1], \text{ es decir que } \mu_\Sigma(x,y) \in [0, 1].$$

Supongamos que  $U$  y  $V$  son dos variables vinculadas por alguna relación funcional  $V=f(U)$ , las cuales toman sus valores sobre los espacios  $X$  y  $Y$ , ambos subconjuntos de los números reales  $\mathbb{R}$ . En el contexto del modelaje borroso, esta relación se representa aproximadamente por una base de  $n$  reglas, las cuales describen la relación conocida entre  $U \in X$  y  $V \in Y$ , tal que cada regla  $R_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) se enuncia de la manera siguiente:

*Si  $U$  está en  $A_i$  entonces  $V$  está en  $B_i$ , donde  $A_i \in X$  y  $B_i \in Y$  son subconjuntos borrosos (1)*

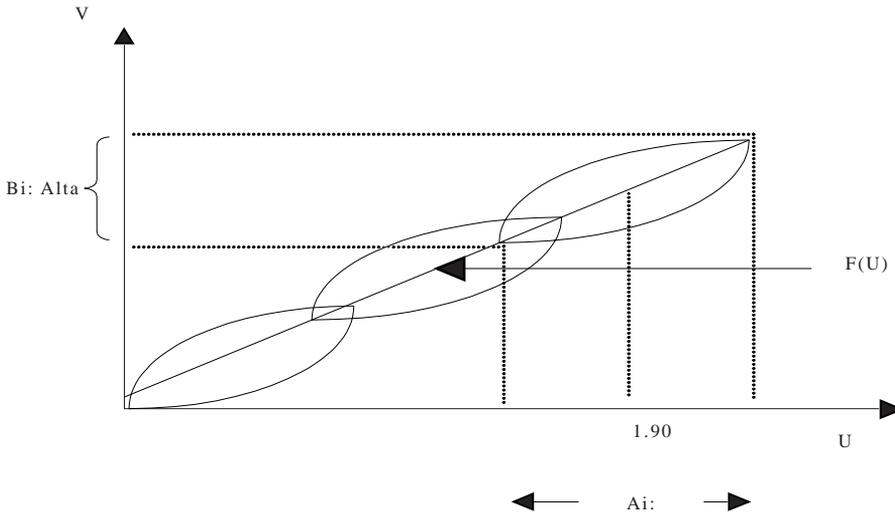
Por ejemplo, si  $U$  es la variable Estatura y  $V$  es el nivel asociado a  $U$ , entonces podemos establecer la siguiente regla:

**Si  $U$  es próxima a 1.80 metros, entonces  $V$  es Alta**

En esta formulación  $A_i$  y  $B_i$  son subconjuntos borrosos, asociados a los conceptos lingüísticos, y definidos sobre los espacios  $X$  y  $Y$ , es decir  $A_i \in X$ ,  $B_i \in Y$ ,

respectivamente. Al emplear el enfoque del modelaje borroso, se particiona la variable estatura  $U$  en regiones borrosas, en las cuales se tiene una buena aproximación de la variable dependiente tipo de estatura  $V$ , como se muestra en la Gráfica 1.

**Gráfica 1**  
**Vista de la partición borrosa**  
**definida por medio de la relación  $U \times V$**



En la gráfica anterior modelamos la función subyacente  $f$  por medio de la unión de parches borrosos, cada uno de los cuales es de la forma del producto cartesiano  $A_i \times B_i$ .

## 2. El algoritmo de inferencia borrosa

Para emplear un modelo borroso y determinar el valor de  $V$ , dado un valor de entrada  $U=x^*$ , se requiere establecer un procedimiento basado en la utilización de una combinación ponderada de los consecuentes de la regla propuesta. La ponderación en este proceso se determina, a su vez, por la relevancia de la regla al valor de entrada dado. Este grado de relevancia se conoce usualmente como *nivel de activación de la regla*. Y al proceso de determinación de la salida para un valor dado de entrada se le llama *inferencia borrosa*.

A continuación se describe el algoritmo empleado para implementar este proceso de inferencia borrosa. Para ello supondremos que tenemos un modelo bo-

roso del tipo expresado en (1); para un valor dado de  $U$ ,  $U=x^*$ , obtenemos el valor  $y^*$  para  $V$  realizando el siguiente procedimiento secuencial:

Paso 1. Encontrar el grado,  $\chi_i$ , al cual se activa la regla  $i$ .

Es decir,  $\chi_i = A_i(x^*)$ , el grado de pertenencia de  $x^*$  en  $A_i$ .

Paso 2. Encontrar la salida efectiva de la regla  $i$  como el subconjunto borroso  $E_i$  cuyo grado de pertenencia se determina como:  $E_i(y) = T(\chi_i, B_i(y))$ .

Paso 3. Encontrar la salida del modelo global como el subconjunto borroso  $E = \bigcap_{i=1}^n E_i$ . El grado de pertenencia de  $E$  está dado por:  $E(y) = S(E_1(y), E_2(y), \dots, E_n(y))$ .

Paso 4. Realizar el *desborrosamiento* de  $E$  para obtener el valor de salida no borroso,  $y^*$ .

En este punto es conveniente emplear una variación del modelo borroso conocido como modelo TSK, el cual puede considerarse como una simplificación o una generalización del proceso de modelaje borroso descrito en el algoritmo de inferencia borrosa (Sugeno–Kang, 1988). En el modelo TSK se reemplazan las consecuentes de las reglas, los subconjuntos  $B_i$ 's, por valores no borrosos que pueden ser funciones de la entrada  $U$ . De acuerdo con este enfoque se representa la base de reglas como:

$$\text{Si } U \text{ está en } A_i \text{ entonces } V \text{ está en } B_i, \text{ donde } B_i = \{1/f_i(U)\}$$

Donde la función  $f_i$  puede ser de cualquier forma, en particular las más empleadas son:  $f_i(U) = a_i$ , una función constante;  $f_i(U) = a_i + b_i U$ , una función lineal.

Aunque ya se han investigado otras formas no-lineales (Filev, 1991). Al emplear estas funciones en los consecuentes, i.e. en los subconjuntos  $B_i$ 's, nos conduce a una formulación analítica para el procedimiento de inferencia borrosa que simplifica en gran medida la implementación del algoritmo de inferencia borrosa descrito.

### 3. Algoritmo de inferencia borrosa usando el modelo TSK

Paso 1. Dado un valor  $U=x^*$ , obtenemos  $\chi_i = A_i(x^*)$ , el grado de pertenencia de  $x^*$  en  $A_i$ .

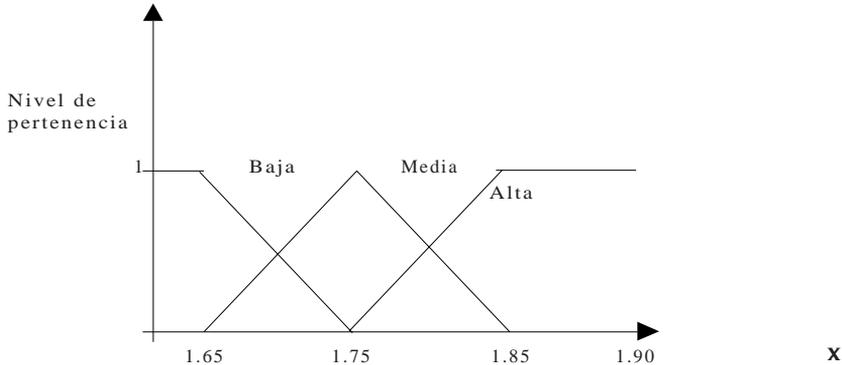
Paso 2. Se encuentra la salida efectiva de la regla  $i$  como el subconjunto borroso  $E_i$ , cuya función de pertenencia es  $E_i = \{\chi_i / f_i(x^*)\}$ .

Paso 3. Se encuentra la salida del modelo global, suponiendo que  $f_i(x^*) \mid f_j(x^*)$  si  $i \mid j$ , como  $E = \{[\chi_1 / f_1(x^*)], [\chi_2 / f_2(x^*)], \dots, [\chi_n / f_n(x^*)]\}$ .

Paso 4. Se obtiene el valor de salida no borroso  $y^*$  dado por:  $[\sum_i A_i(x^*)f_i(x^*)] / [\sum_i A_i(x^*)]$ .

Un aspecto importante de estos modelos borrosos es el método de partición utilizado en el espacio de entrada, i.e. la elección de los subconjuntos borrosos antecedentes  $A_i$ . En la mayoría de las aplicaciones realizadas hasta ahora se han empleado dos clases de subconjuntos borrosos: triangular–trapezoidal y Gaussiano, por ejemplo, en la Gráfica 2 se muestran funciones de pertenencia triangular–trapezoidal para la variable estatura  $X$ .

**Gráfica 2**  
**Partición triangular–trapezoidal del espacio**  
**de la variable estatura  $X$**



Finalmente, la construcción de los conjuntos borrosos se realiza básicamente usando dos diferentes enfoques. El primer enfoque es un sistema experto, el cual se basa en utilizar expertos que proporcionen las reglas. Se propician diálogos con los expertos para que, a partir de su conocimiento del dominio de estudio, se obtenga la base de reglas requerida. En el segundo enfoque se emplean las observaciones del sistema para obtener las reglas; en particular, se pueden usar los datos de entrada–salida y algunas técnicas de clasificación borrosa apropiadas (Yager, 2000).

#### 4. Acerca del modelaje en Economía

Una parte importante de la teoría económica se construye empleando modelos, no de una sola ecuación, sino en base a conjuntos o sistemas de ecuaciones. Estos sistemas consisten en la construcción de modelos que relacionen variables de interés. Entre estos sistemas podemos mencionar el problema de equilibrio de mercado, modelos de macroeconomía, conjuntos de ecuaciones de demanda de factores o mercancías, etc.

Los modelos construidos se utilizan con diversos propósitos, dos de los cuales son la predicción y el análisis. Un ejemplo prototipo de esto lo constituyen las relaciones precio-oferta y precio-demanda. Denotaremos en adelante como  $P$ ,  $O$  y  $D$  a las variables precio, oferta y demanda, respectivamente; y supondremos que estas variables toman sus valores en los espacios  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  respectivamente, todos ellos subconjuntos de los reales.

Consideremos inicialmente la relación precio-oferta, denotada funcionalmente como:

$$O = g(P)$$

Es claro que esta es una relación creciente que, expresada en forma lineal, sería:

$$O(P) = \alpha P + \beta$$

Donde la pendiente  $\alpha$  es una constante positiva.

En la mayoría de las situaciones realistas se presenta en forma de una relación no-lineal más compleja. Una manera de modelar esta relación no-lineal es con ayuda de un modelo borroso, en esta caso expresamos la relación entre la oferta  $O$  y el precio  $P$  mediante un conjunto siguiente de  $n$  reglas:

$$\text{Si } P \text{ está en } A_j \text{ entonces } O \text{ está en } g_j(P)$$

De acuerdo con el algoritmo de inferencia borrosa, descrito en la sección anterior, dado un precio conocido  $P = p$ , obtenemos el correspondiente valor para la oferta  $o^*$  dado por:

$$o^* = [\sum_j A_j(p)g_j(p)] / [\sum_j A_j(p)], \text{ donde } j=1,2,\dots,n.$$

Esta expresión representa la relación borrosa  $O = g(p)$ , es decir la relación oferta–precio.

Como se comentó anteriormente, el primer enfoque para la construcción de los conjuntos borrosos requiere del saber proporcionado por el conocimiento que del problema tienen los expertos. Puede encontrarse así que, por ejemplo, para precios muy bajos, existe poco incentivo para producir bienes, pues el precio es menor que el respectivo costo de producción; al empezar a incrementarse el precio se tiene un incentivo creciente para la producción de los bienes; posteriormente se llega a una región de crecimiento estable en donde un incremento en el precio no producirá un aumento sustancial de la producción; después se encuentra una región en la que, nuevamente, aparece otro incentivo para incrementar la producción; finalmente, se encuentra una región en la cual ocurre la saturación y no es posible generar una producción adicional.

Como ya se mencionó, uno de los problemas relevantes en el análisis económico es el llamado *problema de equilibrio*. El objetivo de este problema es encontrar el precio  $P$  para el cual la demanda  $D$  es igual a la oferta  $O$ . Cuando las curvas de oferta y demanda son lineales, la solución a este problema consiste en resolver directamente un sistema de ecuaciones lineales simultáneas. Sin embargo, la incorporación de modelos borrosos en este análisis, aunque posibilita un modelaje más realista de las relaciones involucradas, también incrementa la complejidad de encontrar el correspondiente punto de equilibrio. Veremos en la siguiente sección cómo aplicar el algoritmo de inferencia borrosa descrito anteriormente, para obtener la solución simultánea de los modelos borrosos en el cálculo de los puntos de equilibrio.

## 5. Un modelo borroso para el cálculo de puntos de equilibrio

Consideremos un modelo borroso para representar la relación precio–oferta:

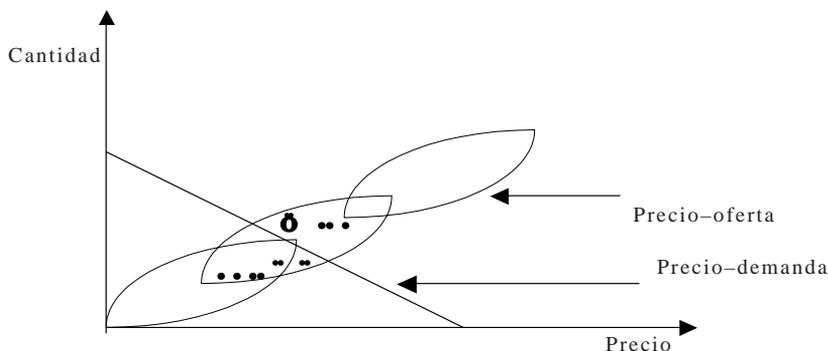
*Si  $P$  está en  $A_j$  entonces  $O$  está en  $g_j(p)$ , para  $j=1,2,\dots,n$*

Y una relación lineal para representar la relación precio–demanda:

$D(p) = \alpha p + \beta$ , donde  $\alpha$  es una constante real negativa

En la Gráfica 3 se muestra este modelo, borroso respecto a la relación precio-oferta, pero lineal respecto a la relación precio–demanda.

**Gráfica 3**



De la Gráfica 3 observamos que nuestro problema es encontrar la intersección de un modelo borroso con una ecuación lineal. De acuerdo con el algoritmo de inferencia borrosa planteado, la forma cerrada de la relación precio-oferta está dada por:

$$y = \{[\sum_j A_j(x)g_j(x)]\}/[\sum_j A_j(x)], \text{ donde } j=1,2,\dots,n \quad (2)$$

Además, la relación lineal precio demanda es:  $z = \alpha x + \beta$ , donde  $\alpha < 0$ .

Entonces el problema de encontrar el valor de  $x$  para el cual  $z = y$  consiste en resolver:

$$\alpha x + \beta = \{[\sum_j A_j(x)g_j(x)]\}/[\sum_j A_j(x)], j=1,2,\dots,n \quad (3)$$

Observemos la diferencia entre (2) y (3). En la primera ecuación se da un valor  $U=x^*$ , y entonces debemos encontrar el valor  $y$  asociado; en la segunda *no se conoce* el valor  $x$  y se debe resolver (3) para encontrar dicho valor. Generalmente, el problema de encontrar la solución a (3) requiere emplear técnicas iterativas de solución (Golub-Ortega, 1992).

Obviamente, la selección de las funciones de pertenencia para los subconjuntos borrosos  $A_j$  y  $g_j$  afecta la facilidad con la cual podemos resolver (3), como veremos enseguida.

### Aplicación 1

Se considera la representación de las  $A_j$  como subconjuntos borrosos triangulares-trapezoidales, como se muestran en la Gráfica 2, así como formas lineales para los

$g_j$ . Mostraremos cómo conduce esto a soluciones analíticas explícitas para la ecuación (3), cuya obtención no requiere la aplicación de métodos numéricos.

Supongamos que se representa la relación precio–oferta usando el modelo borroso:

Si el precio  $P$  es *bajo* entonces la oferta es  $g_1(p)$

Si el precio  $P$  es *medio* entonces la oferta es  $g_2(p)$

Si el precio  $P$  es *alto* entonces la oferta es  $g_3(p)$

Definamos ahora los subconjuntos borrosos *bajo*, *medio* y *alto* de la manera siguiente:

*Bajo* ( $A_1$ ):

$$A_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ -(1/5)x + 2, & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ 0, & \text{si } 10 \leq x \end{cases}$$

*Medio* ( $A_2$ ):

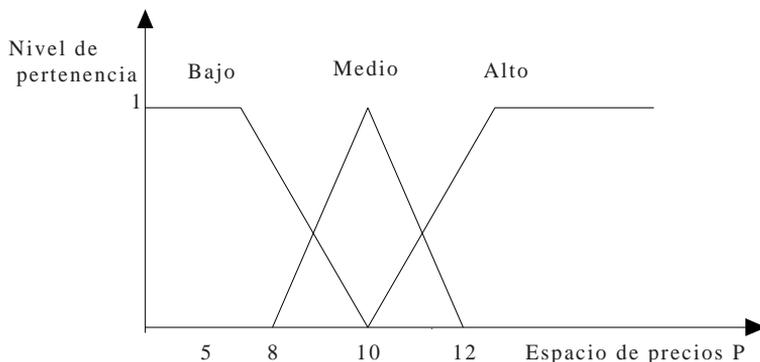
$$A_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 8 \\ (x/2) - 4, & \text{si } 8 \leq x < 10 \\ (-1/2)x + 6, & \text{si } 10 \leq x < 12 \\ 0, & \text{si } 12 \leq x \end{cases}$$

*Alto* ( $A_3$ ):

$$A_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 10 \\ (1/5)x - 2, & \text{si } 10 \leq x < 12 \\ 1, & \text{si } 12 \leq x \end{cases}$$

Esta partición del espacio de precios  $P$  en los subconjuntos borrosos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  se muestra en la Gráfica 4.

**Gráfica 4**  
**Partición del espacio de precios**  
**empleando los subconjuntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$**



Ahora supondremos que los valores para las  $g_j$ 's están dados por:

$$g_1(x) = 8, \quad g_2(x) = 22, \quad g_3(x) = 30.$$

Finalmente establecemos una relación lineal para la relación precio–demanda dada por:

$$z = -2x + 40.$$

De acuerdo con (3), nuestro problema consiste ahora en encontrar la solución del sistema:

$$-2x + 40 = \left\{ \frac{8A_1(x) + 22A_2(x) + 30A_3(x)}{A_1(x) + A_2(x) + A_3(x)} \right\}$$

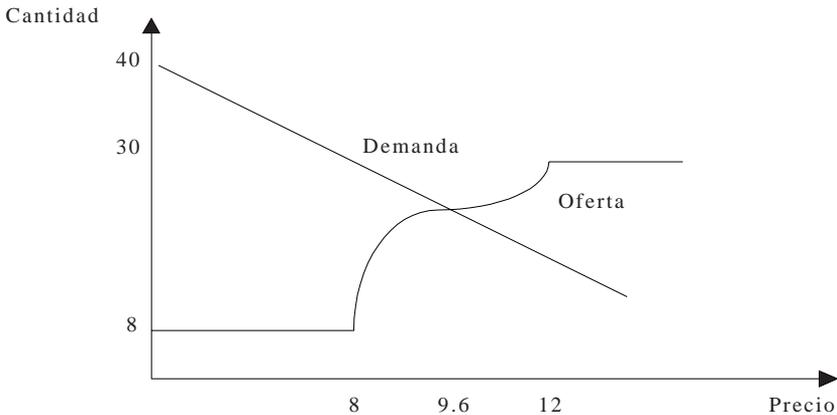
La solución de este sistema de ecuaciones es factible puesto que cada una de las  $A_j$  funciones definidas son continuas, y su unión es también continua. Se puede resolver el sistema considerando los diferentes rangos del eje de precios  $P$ , para ello consideramos inicialmente el rango:  $[0, 5]$ , posteriormente, los rangos  $[5, 8]$ ,  $[8, 10]$ ,  $[10, 12]$  y  $[12, \infty)$ . Los resultados obtenidos se encuentran en el Cuadro 1.

**Cuadro 1**

Rango	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	Ecuación resultante	Solución
[0, 5]	1	0	0	$-2x + 40 = 8$	$x = 16$
[5, 8]	$(-1/5)x + 2$	0	0	$-2x + 40 = 8$	$x = 16$
[8,10]	$(-1/5)x + 2$	$(1/2)x - 4$	0	$3x^2 - 33x + 40 = 0$	$x \hat{=} \{9.6, 1.3\}$
[10,12]	0	$(1/2)x + 6$	$(1/5)x - 2$	$6x^2 - 150x + 880 = 0$	$x \hat{=} \{15.6, 9.4\}$
[12, $\infty$ )	0	0	1	$-2x + 40 = 30$	$x = 5$

En este Cuadro se muestra en negritas el único valor para el cual se obtiene una solución: cuando  $x = 9.6$  en el rango [8, 10]. Como sólo ocurre en este caso, la solución del punto se alcanza cuando  $p = \$9.60$ , en cuyo caso se tiene un precio con nivel de pertenencia borrosa  $A_1(9.6) = 0.08$ ,  $A_2(9.6) = 0.80$  y  $A_3(9.6) = 0$ . Esto significa que el precio  $p = \$9.60$  tiene un 8% de pertenencia al valor lingüístico *Bajo*, un 80% al *Medio* y no pertenece al *Alto*. Para este valor de equilibrio, la demanda resultante es  $D(9.6) = 20.8$ .

**Gráfica 5**  
**Solución del sistema del modelo borroso–lineal**



En la Gráfica 5 se muestran las curvas de ambas relaciones, así como el punto de equilibrio resultante. De hecho, podemos generar una alternativa para simplificar el procedimiento anterior, al restringir el espacio de rangos posibles a aquellos para los cuales se observan los valores más cercanos al punto de equi-

brio. De acuerdo con esta Gráfica, basta con considerar los rangos que ocurren entre los valores 8 y 12, es decir el rango [8, 12].

### Aplicación 2

Consideremos ahora que en la aplicación 1, en lugar de suponer una relación precio-demanda lineal, suponemos que esta relación es también borrosa y definida por las tres reglas siguientes:

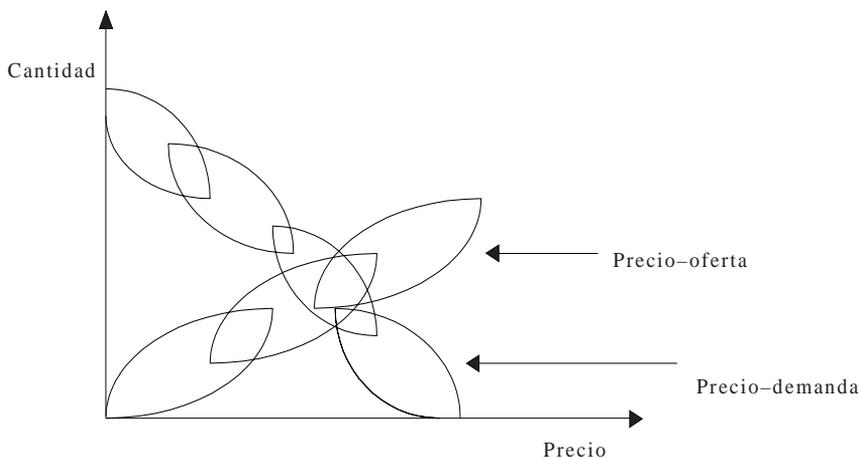
Si el precio  $P$  está en  $B_1$  entonces la demanda  $D$  es  $h_1(p)$

Si el precio  $P$  está en  $B_2$  entonces la demanda  $D$  es  $h_2(p)$

Si el precio  $P$  está en  $B_3$  entonces la demanda  $D$  es  $h_3(p)$

Es decir que, ambas relaciones precio-oferta y precio-demanda son ahora borrosas, como se muestra en la Gráfica 6.

**Gráfica 6**  
**Un modelo borroso en ambas relaciones:**  
**precio-oferta y precio-demanda**



De acuerdo con el algoritmo de inferencia borrosa planteado, la forma cerrada de la relación precio-demanda está dada por:

$$z = \{[\sum_i B_j(x)h_i(x)]\}/[\sum_i B_i(x)], \text{ donde } i=1,2,\dots,n$$

Debemos encontrar entonces la solución simultánea del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \frac{g_1(x)A_1(x) + g_2(x)A_2(x) + g_3(x)A_3(x)}{A_1(x) + A_2(x) + A_3(x)} \right\} = \left\{ \frac{h_1(x)B_1(x) + h_2(x)B_2(x) + h_3(x)B_3(x)}{B_1(x) + B_2(x) + B_3(x)} \right\} \quad (4)$$

Para resolver (4) definimos ahora los subconjuntos borrosos  $B_i$  de la manera siguiente:

$$B_1(x) = \begin{cases} -(1/8)x + 1, & \text{si } 0 \leq x < 8 \\ 0, & \text{si } 8 \geq x \end{cases}$$

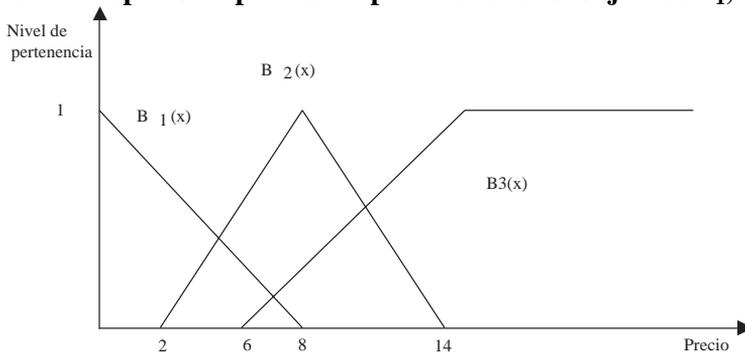
$$B_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ (1/6)x - (1/3) & \text{si } 2 \geq x < 8 \\ -(1/6)x + (7/3) & \text{si } 8 \geq x < 14 \\ 0, & \text{si } 14 \geq x \end{cases}$$

$$B_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < 6 \\ (1/9)x - (2/3) & \text{si } 6 \geq x < 15 \\ 1, & \text{si } 15 \geq x \end{cases}$$

Supondremos además que:  $h_1(p) = 32$ ,  $h_2(p) = 18$ ,  $h_3(p) = 6$ . En la Gráfica 7 se muestran estos subconjuntos borrosos que particionan al espacio de precios P.

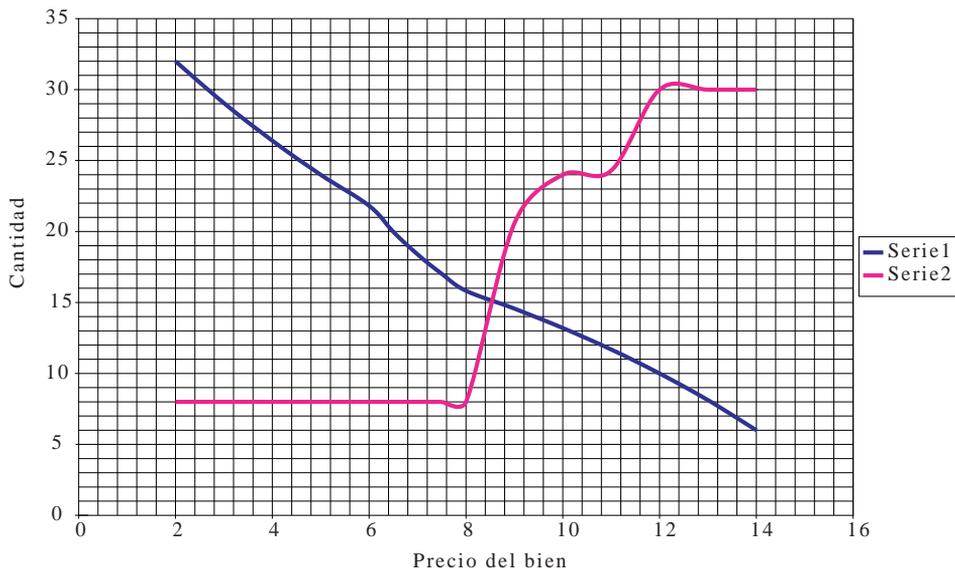
**Gráfica 7**

**Partición del espacio de precios empleando los subconjuntos  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$**



Análogamente al caso anterior, la solución de este sistema de ecuaciones es factible, puesto que cada una de las  $B_i$  es continua, y su unión lo es también. La solución de este sistema se obtiene considerando los cinco diferentes rangos del eje Precios:  $[0, 2]$ ,  $[2, 6]$ ,  $[6, 8]$ ,  $[8, 14]$ ,  $[14, \infty)$ . El procedimiento puede realizarse en la forma ya descrita en la aplicación 1; sin embargo podemos, de manera equivalente, construir las gráficas correspondientes precio-oferta y precio-demanda definidas en (4). Analizando estas gráficas podemos determinar el rango de valores de los precios, para el cual ocurre el valor de equilibrio buscado. En la Gráfica 8 se muestra el resultado de sustituir en la Gráfica 5 la anterior relación lineal precio-demanda  $D(p) = -2p + 40$ , por la relación borrosa precio-demanda definida en (4). En la gráfica 7 se observa que el rango donde ocurre el punto de equilibrio es  $[8, 10]$ , resolveremos entonces (4) en este rango específico:  $\{(94x - 720) / (3x - 20)\} = \{(-42x + 684) / (-x + 30)\}$ , de donde obtenemos una ecuación cuadrática:  $32x^2 + 648x - 7920 = 0$ , cuya única solución factible es:  $x = 8.58$ . Por lo tanto, el precio de equilibrio cuando se ambas relaciones son borrosas es de \$8.58.

**Gráfica 8**  
**Curvas precio-oferta (serie 1) y precio-demanda (serie 2)**



## Conclusiones

El presente trabajo constituye una primera aproximación a la formalización de un enfoque borroso al problema del cálculo de puntos de equilibrio. Una próxima etapa puede ser el considerar que tanto la relación precio-oferta como la relación precio-demanda son definidas a través de subconjuntos borrosos con funciones de pertenencia de tipo gaussiano (Yager, 2000). Un aspecto importante del modelo borroso propuesto, se refiere a la base de reglas borrosas empleadas para definir los subconjuntos borrosos, para ello se utilizaron datos de entrada-salida, tipo caja negra, que con la aplicación del modelo borroso arrojó resultados que verifican su consistencia.

Aunque el sistema resultante, al emplear funciones de pertenencia gaussianas, es más complejo, como nuevamente las correspondientes particiones de X y Y se representan con funciones continuas, es de esperarse que se obtengan, en tal caso, también soluciones analíticas sin tener que aplicar métodos numéricos.

El modelo propuesto funciona simulando el comportamiento real observado para generar las relaciones precio-oferta y precio-demanda, puesto que, en situaciones reales el productor no establece sus planes de producción en función de un solo valor del parámetro precio, sino estableciendo rangos de precios para definir un grupo de planes de producción.

## Referencias Bibliográficas

- Filev, D. P. (1991). *Fuzzy modeling of complex systems*, I. J., Aproxim. reasoning, v. IV, p. 218-29, Japón.
- Ortega Golub (1992). *Cientific computing and differential equations*, Sn. Diego: Academic Press.
- Sujeno M. and Kang G. T. (1988). Structure identification of fuzzy, fuzzy sets and systems, vol. 28, p. 15-33, The Netherlands.
- Yager, R.R. and Filev, D. P. (1994). *Essentials of fuzzy modeling and control*, New York: Wiley.
- *et al.*, (1995). *Theoretical aspects of fuzzy control*, New York: Wiley
- (2000). *Simultaneous solution of fuzzy models, fuzzy sets and systems*, vol. 115, pp. 339-349, The Netherlands.