Análisis Económico
Núm. 44, vol. XX
Segundo cuatrimestre de 2005

Estudio de un portafolio en la frontera de media-desviación estándar no observable

(Recibido: noviembre/04–aprobado: febrero/05)

*Eneas A. Caldiño García**

Resumen

En este artículo se demuestra que si un portafolio *p* está en la frontera generada por N instrumentos financieros, entonces el portafolio *p* está en la frontera generada por cualquier subconjunto de M (M < N) de los N instrumentos financieros y el mismo portafolio *p*. También se demuestra que si existe un portafolio *q* de K portafolios que está en la frontera generada por una colección infinita numerable de instrumentos financieros, entonces el portafolio *q* está en la frontera generada por los K portafolios y cualquier subcolección finita de la colección infinita de instrumentos financieros. Se ilustra la utilidad de estos resultados al probar empíricamente el CAPM (Capital Asset Pricing Model) y una versión del APT (Arbitrage Pricing Theory).

Palabras clave: frontera de media-desviación estándar, CAPM, APT.
Clasificación JEL: G11, G12.

* Investigador del Centro de Estudios Económicos de El Colegio de México (eneas@colmex.mx).

Introducción

El CAPM establece que el portafolio de mercado (el cual está formado por *todos* los instrumentos financieros en la economía) se encuentra en la frontera de media-desviación estándar generada por *todos* los instrumentos financieros en la economía. Como es sabido, la no observabilidad de la totalidad de los rendimientos de los instrumentos financieros ocasiona graves problemas a la hora de intentar probar empíricamente la validez del CAPM, pues el portafolio de mercado no es observable. Este problema ha sido discutido ampliamente en la literatura especializada por varios autores (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997; Connor y Korajczyk 1995; Constantinides y Malliaris, 1995; Fresón, 1995; Huang y Litzenberger, 1988). Por otra parte, la frontera de media-desviación estándar generada por *todos* los instrumentos financieros tampoco es observable, lo cual en principio representa un problema al tratar de probar empíricamente la validez del CAPM. Este problema ha sido tratado en la literatura mencionada de manera tangencial y en este trabajo analizamos una forma de enfrentarlo.

Algunas versiones del APT (Arbitrage Pricing Theory) establecen que existe una combinación de portafolios factores que está en la frontera de media-desviación estándar generada por una colección infinita numerable de rendimientos de instrumentos financieros $\{R_1, R_2, R_3,...\}$ (Chamberlain, 1983; Chamberlain y Rothschild, 1983; Lehmann y Modest, 1988; etc.). Dado que solamente podemos tener observaciones sobre los rendimientos de un número finito de instrumentos financieros, surge el problema de que la frontera generada por $\{R_1, R_2, R_3,...\}$ no es observable. Nuevamente, la literatura no se ha ocupado mucho de este problema y en este trabajo se desarrolla una manera de resolverlo.

En la sección uno se plantea y se sugiere una solución al primer problema: demostrar que un portafolio dado está en la frontera de media-desviación estándar generada por una colección finita de instrumentos financieros, cuando no todos los instrumentos financieros en esa colección son observables. También se elabora una aplicación de la solución propuesta al caso del CAPM. En la siguiente sección se plantea y propone una solución al segundo problema: probar que existe un portafolio de un conjunto dado de portafolios factores que está en la frontera de media-desviación estándar generada por una colección infinita numerable de rendimientos de instrumentos financieros, cuando sólo un número finito de estos es observable; y se obtiene una aplicación de la solución propuesta a una versión del APT.

1. Caso en que la frontera está generada por un número finito de instrumentos financieros de los cuales no todos son observables

El planteamiento formal del primero de los problemas mencionados es la siguiente: consideremos N instrumentos financieros con rendimientos linealmente independientes R_i, i = 1, 2, ..., N. Se quiere probar una teoría que establece la proposición:

P: El portafolio *p* con rendimiento $R_p = \sum_{i=1}^{N} a_i R_i$ $(\sum_{i=1}^{N} a_i = 1)$ está en la frontera generada por los N instrumentos financieros.

Supongamos que sólo hay observaciones sobre el rendimiento del portafolio *p* y sobre los rendimientos de M (M < N) de los N instrumentos financieros. Esto significa que la teoría *P* no puede ser probada directamente, pues la falta de observaciones impide estimar la frontera generada por los N instrumentos financieros. Sin embargo, se puede proceder a probar una implicación de *P*, es decir, es posible comprobar una proposición *Q* que es una condición necesaria, pero no suficiente, para *P*, ($P \rightarrow Q$). Siguiendo las reglas de la lógica matemática, si la proposición *Q* es rechazada (i. e. se toma como falsa), la proposición *P* se toma como falsa y por tanto es rechazada. Si la proposición *Q* no es rechazada (i. e. se toma como verdadera), esta vez abandonando las reglas de la lógica matemática, tampoco rechazamos la proposición *P*. En la proposición 1 se demuestra que una proposición *Q* que es condición necesaria, pero no suficiente, para *P* es:

Q: El portafolio *p* está en la frontera generada por el mismo portafolio *p* junto con cualquier subconjunto de M (M < N) de los N instrumentos financieros.

Antes de probar la proposición 1 es conveniente recordar el concepto de frontera de media-desviación estándar. Dado un conjunto S de L instrumentos financieros (L ≥ 1), un portafolio de ellos, con rendimiento esperado igual a $E \in R$, es el portafolio en la frontera con rendimiento esperado E, si su rendimiento es el de menor varianza entre los rendimientos de todos los portafolios (de los instrumentos financieros en S) que tienen rendimiento esperado igual a E (Constantinides y Malliaris, 1995). En caso de que exista un portafolio en la frontera con rendimiento esperado $E \in R$, sea σ (E) su desviación estándar. La frontera de media-desviación estándar generada por los L instrumentos financieros en S es el conjunto:

$$MSF = \{(\sigma(E), E) \in R^2 \mid \sigma(E) \text{ existe para } E \in R\}$$

Cuando $L \geq 2$, los rendimientos de los M instrumentos financieros tienen varianza positiva y al menos dos de ellos tienen diferentes rendimientos esperados, la frontera de media-desviación estándar es la parte derecha de una hipérbola (Constantinides y Malliaris, 1995).

Proposición 1. Consideremos un conjunto de N instrumentos financieros con rendimientos linealmente independientes $\{R_1, R_2,.., R_N\}$. Si un portafolio *p* con rendimiento:

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i R_i \; (\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1)$$

se encuentra en la frontera MSF $(R_1, R_2,.., R_N)$ generada por ellos, entonces el portafolio *p* está en la frontera MSF $(R_p, R_1, R_2,.., R_M)$ generada por el mismo portafolio *p* junto con cualquier subconjunto de M $(M < N)$ de estos instrumentos financieros.

Demostración por contradicción. Sea:

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i R_i \qquad (1)$$

el rendimiento de un portafolio *p* en la frontera de los N instrumentos financieros, pero no en la frontera generada por el portafolio *p* junto con los M instrumentos financieros con rendimientos $R_1, R_2,.., R_M$. Entonces existe un portafolio *q* con rendimiento

$$R_q = \beta_0 R_p + \sum_{i=1}^{M} \beta_i R_i \qquad (2)$$

tal que:

$$E(R_q) = E(R_p) \quad y \quad var(R_q) < E(R_p). \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) en (2):

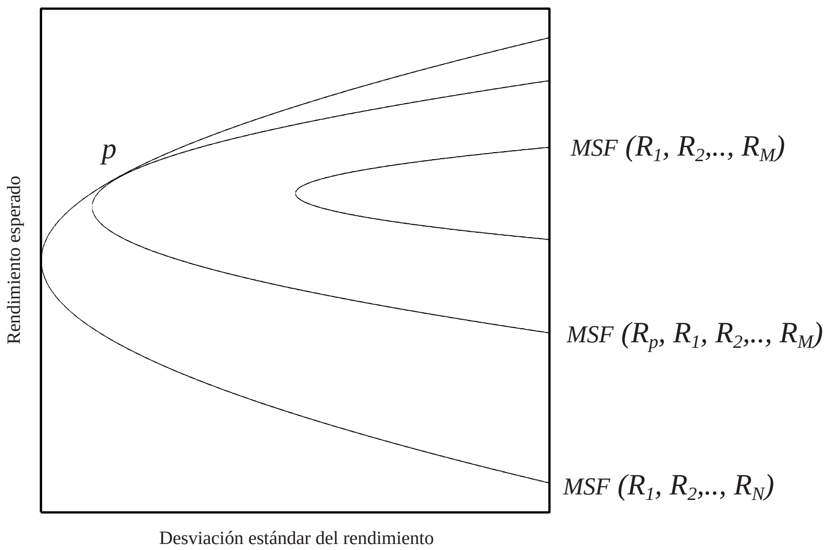
$$R_q = b_0 \sum_{i=1}^{N} a_i R_i + \sum_{i=1}^{M} b_i R_i \qquad (3')$$

$$R_q = \sum_{i=1}^{M} (b_0 a_i + b_i) R_i + b_0 \sum_{i=N+1}^{N} b_i R_i \qquad (3'')$$

entonces *q* es un portafolio de los N instrumentos financieros. La ecuación (3) implica que *p* no está en la frontera generada por los N instrumentos financieros, lo cual es una contradicción.

Geométricamente la proposición 1 significa lo siguiente (Gráfica 1): cuando todos los rendimientos de los N instrumentos financieros tienen varianza positiva y al menos dos de ellos poseen diferentes rendimientos esperados, y un portafolio *p* está en la frontera MSF (R_1, R_2,.., R_N) generada por los N rendimientos R_1, R_2,.., R_N, esta última intersecta a la frontera MSF (R_p, R_1, R_2,.., R_M) generada por los M rendimientos R_1, R_2,.., R_M y el portafolio *p*, en el punto correspondiente al portafolio *p*.

Gráfica 1
Ilustración de la proposición 1



Volviendo al CAPM tenemos lo siguiente: la proposición: “El Portafolio de Mercado está en la frontera generada por todos los instrumentos financieros en la economía”, no es una implicación comprobable del CAPM, porque no todos los rendimientos de todos los instrumentos financieros en la economía son observables, y por tanto, la frontera generada por todos los instrumentos financieros en la economía no es observable. La proposición 1 aplicada al CAPM, afirma que esta teoría tiene una implicación más débil pero más fácil de ser probada: “El Portafolio de Mercado está en la frontera generada por cualquier subconjunto de instrumentos financieros en la economía junto con el propio Portafolio de Mercado”. De esta manera estamos un poco más cerca de poder probar empíricamente el CAPM (véase por ejemplo Gibbons, Ross y Shanken, 1989; Huang y Litzenberger, 1988; y MacKinlay, 1987).

2. Caso en que la frontera está generada por una colección infinita numerable de instrumentos financieros de los cuales sólo un subconjunto finito es observable

El segundo problema se puede formalizar así: consideremos una colección infinita numerable de instrumentos financieros con rendimientos linealmente independientes $\{R_1, R_2, R_3,...\}$. Se tienen K portafolios dados con rendimientos:

$$f_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{k,i} R_i \qquad k = 1, 2, .., K$$

Se quiere probar una teoría que establece la proposición:

P$_1$: existe un portafolio *q* de los K portafolios con rendimientos $f_1, f_2,.., f_K$ que está en la frontera generada por los instrumentos financieros con rendimientos $\{R_1, R_2, R_3,...\}$.

Supongamos que sólo hay observaciones sobre los rendimientos de los K portafolios con rendimientos $f_1, f_2,.., f_K$, y sobre los primeros N rendimientos $R_1,R_2,..,R_N$, pero no sobre el resto de los rendimientos $\{R_{N+1}, R_{N+2}, R_{N+3},...\}$. Esto significa que la proposición P_1 no puede ser probada directamente, pues la falta de observaciones impide estimar la frontera generada por los rendimientos $\{R_1, R_2, R_3,...\}$. Sin embargo, se puede proceder a probar una implicación de P_1, o sea, se puede probar una proposición Q_1, la cual es una condición necesaria, pero no suficiente, para P_1, ($P_1 \rightarrow Q_1$). Si la proposición Q_1 es rechazada (i. e. se toma como falsa), la proposición P_1 se toma como falsa y por tanto es rechazada. Si la proposición Q_1 no es rechazada tampoco rechazamos la proposición P_1. En la proposición 2 se demuestra que una proposición Q_1, que es condición necesaria, pero no suficiente, para P_1 es:

Q_1: el portafolio *q* está en la frontera generada por los K portafolios con rendimientos $f_1, f_2,.., f_K$ y los instrumentos con rendimientos $R_1, R_2,.., R_N$.

Proposición 2. Consideremos un conjunto numerable de rendimientos de instrumentos financieros con rendimientos linealmente independientes $\{R_1, R_2, R_3,...\}$. Sean $f_1, f_2,.., f_K$ los rendimientos de K portafolios linealmente independientes:

$$f_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{k,i} R_i \qquad k = 1, 2, ..., K \tag{4}$$

Si existe un portafolio *q* de los K portafolios con rendimientos $f_1, f_2,.., f_K$ en la frontera MSF $(R_1, R_2, R_3,...)$ generada por $\{R_1, R_2, R_3,...\}$, entonces, para toda $N \geq 1$, el portafolio *q* está en la frontera MSF $(f_1, f_2,.., f_K, R_1, R_2,.., R_N)$ generada por los K portafolios con rendimientos $f_1, f_2,.., f_K$ y los instrumentos con rendimientos $R_1, R_2,.., R_N$.

Demostración por contradicción. Sea:

$$R_q = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$$

el rendimiento de un portafolio *q* en la frontera generada por $\{R_1, R_2, R_3, ...\}$ pero no en la frontera generada por los K portafolios con rendimientos $f_1, f_2, ..., f_K$ junto con los instrumentos con rendimientos $R_1, R_2, .., R_N$. Entonces existe un portafolio *p* con rendimiento:

$$R_p = \sum_{k=1}^{K} b_k f_k + \sum_{j=1}^{N} g_{jRj} \tag{5}$$

tal que:

$$E(R_p) = E(R_q) \quad \text{y} \quad var(R_p) < E(R_q). \tag{6}$$

Sustituyendo (4) en (5):

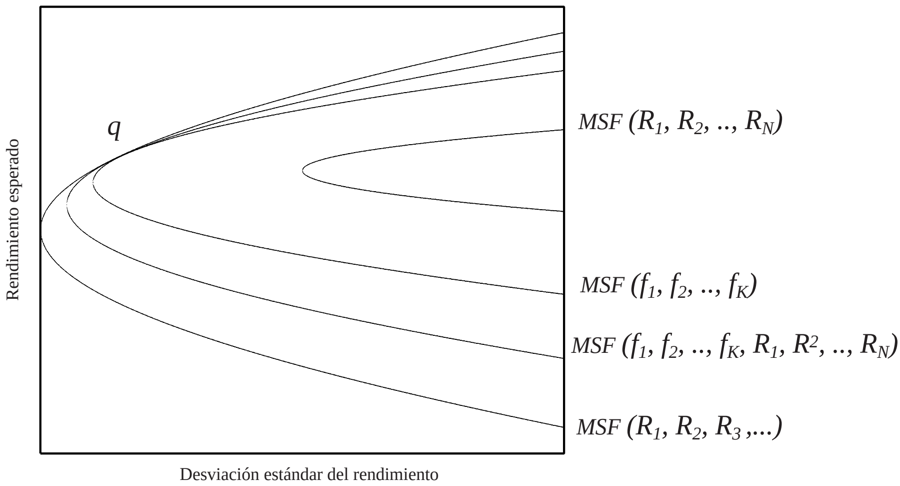
$$R_p = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_k \Big(\sum_{k=1}^{K} a_{k,i} R_i \Big) + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j R_j \tag{6'}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \alpha_{k,i}) R_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{K} \beta_k \alpha_{k,i}) R_i \qquad (6'')$$

tenemos que *p* es un portafolio de los instrumentos financieros con rendimientos $\{R_1, R_2, R_3, ..\}$. La ecuación (6) implica que *q* no está en la frontera generada por los instrumentos financieros con rendimientos $\{R_1, R_2, R_3,..\}$, lo cual es una contradicción.

Geométricamente la proposición 2 significa lo siguiente (Gráfica 2): cuando todos los rendimientos de los instrumentos financieros $\{R_1, R_2, R_3,...\}$ poseen varianza positiva y al menos dos de ellos tienen diferentes rendimientos esperados, y un portafolio *q* en la frontera MSF($f_1, f_2,.., f_K$), generada por los K rendimientos $f_1, f_2,.., f_K$, está también en la frontera MSF ($R_1, R_2, R_3,...$) generada por los rendimientos $\{R_1, R_2, R_3,...\}$, las dos fronteras intersectan a la frontera MSF($f_1, f_2,.., f_K, R_1, R_2,.. R_N$), generada por los rendimientos $f_1, f_2,.., f_K$ y los rendimientos $R_1, R_2,.. R_N$, en el punto correspondiente al portafolio *q*.

Gráfica 2
Ilustración de la proposición 2



Volviendo al APT, tenemos lo siguiente: la proposición: "Existe un portafolio de portafolios factores que está en la frontera generada por una colección infinita numerable de rendimientos de instrumentos financieros $\{R_1, R_2, R_3,...\}$" no es una implicación comprobable del APT, porque solamente tenemos observaciones sobre un número finito de instrumentos financieros y así la frontera generada por $\{R_1, R_2, R_3, ...\}$ no es observable. La proposición 2, aplicada a esta versión del APT, nos dice que esta teoría posee una implicación más débil pero más fácil de ser probada: existe un portafolio de portafolios factores que se encuentra en la frontera generada por los portafolios factores y cualquier subconjunto finito de la colección infinita de instrumentos financieros (véase Gibbons, Ross y Shanken, 1989).

Conclusiones

En el presente trabajo se analizó una forma de probar empíricamente la hipótesis de que un portafolio dado *p* está en la frontera de media-desviación estándar generada por una colección finita de instrumentos financieros, cuando no todos los instrumentos financieros en esa colección son observables, probando una hipótesis más débil, que es condición necesaria, pero no suficiente, para la hipótesis original: el portafolio *p* está en la frontera de media-desviación estándar generada por el mismo portafolio *p*, junto con cualquier subconjunto propio de estos instrumentos financieros.

También se analizó una forma de probar empíricamente la hipótesis de que existe un portafolio de K portafolios factores que está en la frontera generada por una colección infinita numerable de instrumentos financieros, probando una hipótesis más débil, que es condición necesaria, pero no suficiente, para la hipótesis original: el portafolio *q* está en la frontera generada por los K portafolios factores y cualquier subconjunto finito de la colección infinita numerable de instrumentos financieros. Una aplicación de este resultado es que la versión del APT, la cual establece que "existe un portafolio de portafolios factores que está en la frontera generada por una colección *infinita* numerable de rendimientos de instrumentos financieros", tiene una implicación más débil pero más fácil de ser probada: existe un portafolio de portafolios factores que está en la frontera generada por los portafolios factores y cualquier subconjunto *finito* de la colección infinita de instrumentos financieros.

Referencias bibliográficas

Chamberlain, Gary (1983). "Funds, factors, and diversification in arbitrage pricing models" en *Econometrica*, vol. 51, pp. 1305-1323.

——— y M. Rothschild (1983). "Arbitrage, factor structure, and mean-variance analysis on large asset markets" en *Econometrica*, vol. 51, pp. 1281-1304.

Campbell, John Y., A. W. Lo, y A. C. MacKinlay (1997). *The econometrics of financial markets*, EUA: Princeton University Press.

Connor, Gregory y R. A. Korajczyk (1995). "The arbitrage pricing theory and multifactor models of asset returns" en R. Jarrow, V. Maksimovic y W. Ziemba (editors), *Handbooks in operations research and management science,* vol. 9, Amsterdam: Elsevier Science B. V.

Constantinides, George M. y A. Malliaris (1995). "Portfolio theory" en Jarrow, R., V. Maksimovic y W. Ziemba (editors), *Handbooks in operations research and management science,* vol. 9, Amsterdam: Elsevier Science B. V.

Ferson, Wayne E. (1995). "Theory and empirical testing of asset pricing models" en R. Jarrow, V Maksimovic y W. Ziemba (editors), *Handbooks in operations research and management science,* vol. 9, Amsterdam: Elsevier Science B. V.

Gibbons, M. R., S. A. Ross y J. Shanken (1989). "A test of the efficiency of a given portfolio" en *Econometrica*, vol. 57, pp. 1121-1152.

Huang, Chi-fu, y R. H. Litzenberger (1988). *Foundations for financial economics*, North-Holland, Amsterdam.

Lehmann B. N. y D. M. Modest (1988). "The empirical foundations of the arbitrage pricing theory" en *Journal of Financial Economics*, vol. 21, pp. 213-254.

MacKinlay, A. C. (1987). "On multivariate tests of the CAPM" en *Journal of Financial Economics,* vol. 18, pp. 341-372.