

Un estudio sobre el patrón de evolución de la economía de México en el contexto de la OCDE

(Recibido: 03/mayo/012–Aceptado: 19/marzo/014)

*Arturo Aguilar Vázquez**

*Alfredo Sánchez Daza***

*Francisco Venegas-Martínez****

Resumen

El presente trabajo emplea el algoritmo OVS (Objetos-VARIABLES-Situaciones), con base en un modelo de reconocimiento de patrones, para examinar la evolución de indicadores crecimiento y desarrollo de la economía de México en el contexto de la OCDE, durante el periodo 1950-1993. Los objetivos de la investigación son: 1) proponer un modelo de clasificación que permita identificar sistemáticamente las tendencias de convergencia o divergencia de los indicadores del nivel de vida o bienestar en los países que forman la OCDE; 2) aportar elementos que coadyuven a explicar el desarrollo económico de México; y 3) proporcionar una descripción de la dinámica de México en la economía mundial en el periodo de estudio.

Palabras clave: desarrollo económico, análisis macroeconómico, métodos matemáticos.

Clasificación JEL: O11, C02 y C18.24.

* Departamento de Sistemas de la UAM-Azcapotzalco (aav@correo.azc.uam.mx).

** Profesor-Investigador del Departamento de Economía de la UAM-Azcapotzalco (sanchezdaza@yahoo.com).

*** Profesor de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Economía del IPN (fvenegas1111@yahoo.com.mx).

Introducción

El presente trabajo de investigación utiliza un método matemático no convencional, para medir y caracterizar las tendencias subyacentes ubicado durante la trayectoria de evolución de la economía en México. Específicamente, se propone un modelo de reconocimiento respecto a los patrones sobre la evolución económica de nuestro país en el contexto de la OCDE, organización mundial formada en 1960 e integrada inicialmente por Canadá, EUA y otros países de Europa.

La utilización de datos OVS en estudios de escalamiento multidimensional y del análisis factorial multimodal (Carroll-Arabie, 1983 y Rust-Golombok, 1989) consideran solamente variables convencionales o rígidas (*crisp*), en cambio en este trabajo las variables de estudio se consideran difusas o borrosas (*fuzzy*), lo cual aporta mayores posibilidades de aplicación que permiten la realización de estudios longitudinales, a lo largo de un horizonte espacial o temporal.

Las aplicaciones de OVS en el análisis económico han sido escasas. Los campos donde se han reportado algunas de estas aplicaciones son en problemas de preferencias sociales (Sengupta, 1999) y en problemas econométricos para modelar datos de panel (Jozsef *et al.*, 1992), o datos de inversión fija (Lindström, 1998).¹ El objetivo de este trabajo consiste en proponer un modelo dinámico para clasificar datos OVS usando variables difusas, mediante el descubrimiento de su estructura latente por medio de diversas situaciones, espaciales o temporales. Este procedimiento permitirá construir clases (en inglés, *clusters*) que incluyan a todo el conjunto de datos y que consideran como criterio de clasificación, no sólo la similitud entre los pares de objetos en cada situación, sino también la similitud en el patrón de cambio de los pares de valores OV observados a lo largo de la evolución de las S diferentes situaciones, en este caso, temporales.

En el contexto de clasificación, se puede caracterizar el desarrollo del capitalismo moderno por un incremento en los niveles de producción y del comercio internacional, debido a una notable acumulación del capital físico y humano y por un gran progreso tecnológico que ha llegado a impactar a todos los ámbitos de la actividad económica, dando lugar así a nuevos niveles de producción, demanda y

¹ Se han reportado trabajos sobre modelación econométrica con base en el reconocimiento de patrones usando el algoritmo de *c*-medias difusas; destacan las aplicaciones para estimar funciones de consumo agregado, para modelar la curva *U* de Kuznets y para establecer la componente de tendencia en una serie de tiempo (Giles-Draeseke, 2003).

empleo. De hecho, durante el periodo 1820-1992, se observan tres factores principales que surgen con la evidencia empírica encontrada (Maddison, 1995):

- 1) Un rápido crecimiento económico: la población mundial aumentó cinco veces; el PIB per cápita creció ocho veces; el PIB mundial tuvo un incremento de 40 veces; y el comercio mundial creció 540 ocasiones.
- 2) Una gran diferencia en el incremento del ingreso per cápita entre países y regiones, de tal manera que se agudizaron ampliamente los contrastes interregionales.
- 3) Una gran variabilidad en las tasas de crecimiento económico: el mejor desempeño se observó en el periodo de la posguerra (1950-1973) el siguiente en importancia fue en 1870-1913, y el de peor desempeño se tuvo entre 1973-1992.

Desde la perspectiva anterior es importante estudiar la evolución de la economía mundial durante dos periodos: uno que incluye el mejor desempeño en el crecimiento (1950-1973) y el de peor desempeño (1973-1992); destacando la dinámica del crecimiento y desarrollo económico de México. Para lograr esto se requiere desarrollar herramientas de análisis multivariado que permitan manejar la gran cantidad de información disponible en la actualidad, pues se trata de estudiar los patrones de cambio de objetos (personas, empresas, estados, países, organizaciones, etc.), caracterizados mediante variables (matemáticas, físicas, socioeconómicas, etc.), ya sea en situaciones o estudios transversales (estáticos) o longitudinales (dinámicos). El presente trabajo emplea el algoritmo OVS, el cual utiliza técnicas de reconocimiento de patrones, a fin de analizar la evolución temporal de la economía de México en el contexto de la OCDE durante 1950-1993.

En este esquema, los objetivos del presente trabajo son:

- 1) Proponer un modelo de clasificación que identifique las posibles tendencias de convergencia/divergencia en los indicadores del nivel de desarrollo, para los países que forman la OCDE;
- 2) Aportar elementos que coadyuven a explicar el desarrollo económico de México; y
- 3) Lograr una descripción de la dinámica México en la economía mundial en el periodo de estudio.

El presente trabajo está organizado como sigue: en la sección 1 se esbozan los principales métodos matemáticos de clasificación de datos multidimensionales, específicamente la representación gráfica de los datos OVS y el problema de su clasificación en el contexto del reconocimiento de patrones; la sección 2 consiste en

la aplicación de un algoritmo de clasificación dinámica, propuesto para estudiar el patrón de evolución de la economía de México como integrante de un estudio realizado por la OCDE a un grupo de 20 países, a dos niveles: primero en un estudio a escala reducida, que incluye solamente dos variables socioeconómicas y luego en uno a escala completa con cuatro variables socioeconómicas; en la sección 3 se realizan dos estudios de simulación con el modelo dinámico propuesto. Es importante mencionar que el algoritmo de clasificación dinámica propuesto consiste, estrictamente, en el corolario de un teorema de generalización dinámica del ya conocido teorema de clasificación de *c*-medias difusas (en inglés, *fuzzy k-means*), ambos, el teorema (y su respectiva demostración) así como el algoritmo se incluyen en sendos anexos al final del presente trabajo.

1. El problema de la clasificación de datos

El problema de clasificación de datos constituye uno de los principales objetivos de investigación en las ciencias, tanto sociales como naturales. En la actualidad el problema ha adquirido dimensiones formidables, debido a la enorme cantidad de información que ahora puede obtenerse en la mayoría de los campos del conocimiento.

El principal objetivo de las técnicas de clasificación es dividir un conjunto de datos en clases o conglomerados, esto resulta especialmente importante en economía, en cuanto a los problemas de formulación y estimación de relaciones econométricas, pues la forma funcional de dichas relaciones no siempre puede inferirse a partir de la teoría económica subyacente, en cuyo caso, resulta esencial emplear técnicas apropiadas de clasificación socioeconómica, como un primer paso en la construcción de un sistema de reconocimiento de patrones para el conjunto de datos de estudio. En particular, el análisis estadístico convencional de datos multidimensionales obtiene datos, presentados en forma matricial, mediante muestreos aleatorios en los cuales se realiza la aplicación de métodos estadísticos inferenciales, estos datos consisten, principalmente, en objetos y variables, denotados como datos OV. De manera análoga, se utiliza la matriz de las distancias entre los objetos para realizar el análisis de clases o conglomerados (en inglés, *clusters*), y en otros análisis similares.

Cuando los datos OV se generalizan para incluir al conjunto de las diversas situaciones, controladas o no, por las que pueden pasar, entonces es importante estudiar la evolución del conjunto extendido de datos, de tal manera que podamos establecer un criterio de clasificación de los datos OV a lo largo de

todas las situaciones (S), denotados como datos OVS, que sea objetivo y, a la vez, útil. En este trabajo se propone un procedimiento algorítmico no inferencial de clasificación de datos OVS, el cual consiste en una generalización del ya conocido método de c-medias difusas para datos OV (Bezdek, 1981), al caso de datos OVS. El procedimiento algorítmico propuesto para la clasificación de datos OVS se enuncia como corolario de un teorema, el cual se demostrará en un apéndice al final del presente trabajo.

El problema de la clasificación o discriminación de datos consiste en, dado un conjunto de datos multidimensionales o multivariantes OV, tomar decisiones sobre cómo clasificar a un nuevo objeto con un cierto vector de caracterización dentro de alguno de los subconjuntos definidos en OV. Esta clasificación equivale a discriminar al resto de los subconjuntos.²

En el análisis de datos multidimensionales se han desarrollado *grosso modo* tres tipos de métodos de clasificación o discriminación de datos, para cada clase axiomática de los modelos matemáticos subyacentes:

- 1) Jerárquicos: surgen de estudios de tipo taxonómico, especialmente en problemas donde los datos de estudio tienen una estructura dendrítica, es decir, donde los datos se pueden acumular o dividir. Uno de los más populares es el método de los árboles de clasificación y regresión (CART, por sus siglas en inglés) (Breiman *et al.*, 1993).
- 2) Teoría de gráficas: se caracterizan por considerar al conjunto total de datos como un conjunto de nodos, de manera que las ponderaciones en cada nodo se definen de acuerdo al grado de similitud entre cada par de nodos. Tales métodos están basados en la representación de funciones continuas de cierto número de variables mediante funciones continuas de una variable, para lograr esto se utilizan, principalmente, redes neuronales (Ripley, 1994).
- 3) Función objetivo: se basa en una formulación más objetiva del criterio de clasificación. Los modelos de clasificación de datos basados en una función objetivo son recomendables, incluso, en casos donde no resulta apropiado usar los modelos de teoría de gráficas (Bezdek, 1981).

² Por ejemplo, la primera aplicación del método de clasificación consistió en clasificar, como humano o como antropoide, los restos de un cráneo descubierto en una investigación antropológica (Peña, 2002).

Particularmente, este trabajo se enfoca en un método de clasificación basado en la utilización de una función objetivo. Con dicha función objetivo se mide la similitud de los datos para que sean incluidos en cada una de las clases. Específicamente, si la medida de similitud empleada es la distancia euclidiana de cada dato $X_i \in \mathbb{R}^n$, y la medida de bondad de ajuste es la suma general, dentro de los grupos, de las diferencias cuadráticas entre X_i respecto a un cierto valor de tendencia central v_k característico, entonces se define a la función objetivo como la suma de las diferencias cuadráticas observadas.

1.1 Caracterización de datos OVS

A continuación se caracterizan los conjuntos de datos OVS, que son el aspecto central del algoritmo de clasificación que proponemos, en el contexto del reconocimiento de patrones.

Objetos (O): corresponden a los sujetos o unidades de interés individuales, los cuales proporcionan los datos para realizar la evaluación de las relaciones entre las variables.

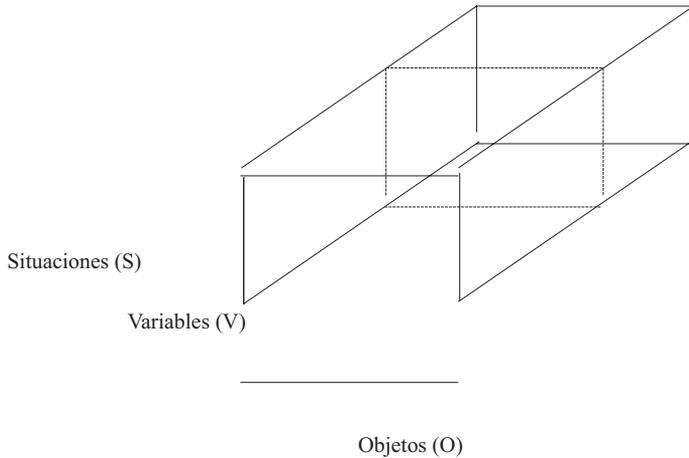
Variables (V): son los atributos de los objetos que son cuantificados, estos atributos pueden ser cualquier característica susceptible de ser medida de una manera objetiva.

Situaciones (S): son las condiciones específicas que son comunes a todos los datos en el estudio de interés, incluyen las localizaciones temporales y/o espaciales de los objetos; asimismo, las posibles variaciones en los métodos de registro usados para las variables o los diversos tratamientos bajo los cuales fueron medidas las variables. En este contexto, una observación es el registro o medición de una variable específica, correspondiente a un determinado objeto, de acuerdo a diversas situaciones previamente establecidas.

1.2 Representación gráfica de datos OVS

Caracterizamos en general a los datos OVS. En este trabajo, los 20 países miembros de la OCDE hasta el año 1992 serán los $O=20$ objetos, para los cuales obtenemos las mediciones de las $V=4$ variables: Escolaridad formal, PIB per cápita, PIB por hora trabajada y PIB por persona empleada; finalmente, se pueden considerar los valores obtenidos en las cuatro variables mediante tres años significativos, es decir, para $S=3$ situaciones temporales.

Gráfica 1
Datos OVS: objetos, variables y situaciones



La clasificación de datos OVS tiene la desventaja de que cada posible criterio de clasificación de los O objetos no es invariable respecto a las S posibles situaciones, debido al cambio de las V variables consideradas en cada nueva situación. De manera que las clases óptimas encontradas respecto a un conjunto de datos OVS cambian para cada criterio definido en la situación S , y se concluye que no sería apropiado aceptar una clasificación óptima para una sola situación. Este problema se puede plantear de manera equivalente a cómo encontrar una clasificación óptima de un conjunto de datos OVS que sea consistente con los criterios especificados, que los cumpla en la mayor medida posible y que sea invariable respecto a las situaciones; es decir, se trata de resolver un problema de optimización de múltiples criterios (POMC).

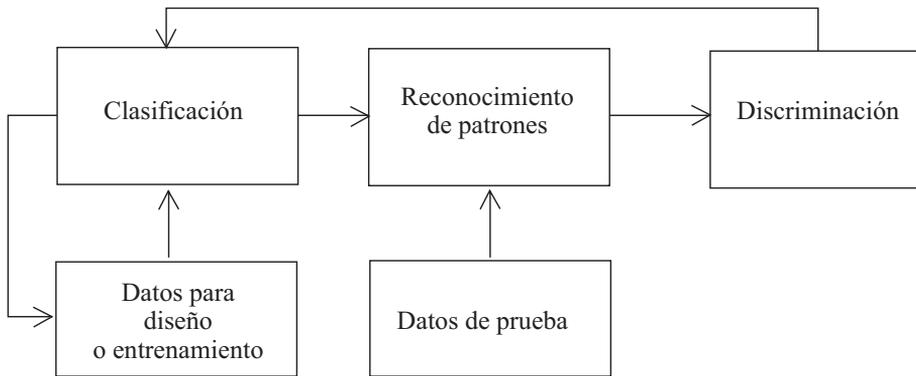
1.3 Clasificación y reconocimiento de patrones

Existen similitudes en los conceptos de clasificación de datos y de reconocimiento de patrones en datos, pues ambos conceptos se consideran como etapas de un mismo proceso: el reconocimiento de patrones consiste en el procedimiento para identificar la estructura en un conjunto de datos, mediante la comparación con una estructura dada, la cual se determina mediante la aplicación de los métodos de clasificación ya mencionados. Es decir, la clasificación determina la estructura subyacente en los

datos, mientras que el reconocimiento de patrones toma nuevos datos para asignarlos a una de las clases ya definidas en la clasificación. Por esta razón, el proceso común a ambos conceptos se llama sistema de reconocimiento de patrones (SRP), mostrada en la Gráfica 2, donde se observan ambos circuitos de retroalimentación:

- 1) En la clasificación, al tomar datos agregados, con variables nuevas o medidas con mayor precisión, con el fin de mejorar la definición de las clases formadas.
- 2) En el reconocimiento de patrones, cuando se agregan nuevos datos, debido a fallas en la asignación a alguna de las clases formadas.

Gráfica 2
SRP para los datos de entrenamiento o de diseño y los datos de prueba



2. Evolución de la economía de México en la OCDE

Para iniciar el estudio de cómo ha evolucionado la economía de México a lo largo del tiempo se debe obtener una base de datos confiable y lo más representativa posible de un conjunto apropiado de datos OVS, durante un periodo históricamente amplio; en particular, se deben incluir los periodos de mayor crecimiento (1950-1973) y de menor crecimiento (1973-1992) del PIB mundial, mencionados anteriormente; además de otras variables socioeconómicas y de bienestar social relacionadas con el PIB. Una vez obtenida dicha base de datos se procede a aplicar el algoritmo de clasificación dinámica que se define y detalla en el Anexo 2 de este trabajo; el cual se encuentra como un corolario de un teorema de generalización del teorema de clasificación de *k*-medias difusas (en inglés, *fuzzy k-means*). Dicho teorema generalizado se demuestra en el Anexo 1.

2.1 Naturaleza de los datos y su algoritmo de clasificación

Para compilar una base de datos con información confiable, se optó por emplear una base de datos económicos generados en 1997 por la propia OCDE. En la siguiente etapa, se procede a depurar, en la base de datos, la información económica que incluye a México. Sin embargo, en dicho periodo de estudio (1950-1993) se reportan vacíos de información para algunos países incluyendo a México, indicados con las siglas n.d., este hecho limita, por supuesto, el alcance de nuestra investigación. El conjunto de los 20 países, principalmente miembros de la OCDE, ordenados alfabéticamente para los que se generó la base de datos de presente estudio se muestra en el Cuadro 1.

Cuadro 1
Países integrantes de la OCDE incluidos en el estudio

| | | | | |
|-----------|----------|---------|--------------|-------------|
| Alemania | Chile | EUA | Japón | Reino Unido |
| Argentina | Colombia | Francia | México | Suecia |
| Bélgica | Corea | India | Países Bajos | Taiwán |
| Brasil | España | Italia | Portugal | Venezuela |

Fuente Maddison (1997).

Con base en el Cuadro 1 se define lo siguiente:

O: Los 20 países miembros de la OCDE en 1995, V: Las cuatro variables de estudio:

X_1 : Años de educación formal (población de 15 a 64 años);

X_2 : PIB per cápita;

X_3 : PIB/hora trabajada;

X_4 : PIB/ persona empleada; y

S: Las tres situaciones temporales: $s_1=1950$, $s_2=1973$, $s_3=1992$.

Notación. Denotamos al conjunto de datos OVS como $X=(X_{ij}^{(s)})$, donde i denota al objeto ($i=1,2, \dots, O$); j denota a la variable ($j=1,2,.., V$); y s denota a la situación ($s=1,2, \dots, S$). De manera que es posible clasificar a los O objetos en K clases difusas, cada una con centroide C_k ($k=1,2 \dots, K$). Es claro que: $2 \leq K < O$. Entonces, de acuerdo al algoritmo de clasificación de datos OVS definido en el Anexo 2, se requiere definir:

Paso 1. Se establece $K=3$, el número apropiado de clases, el valor del nivel de difusividad $\alpha=2$ y el valor del criterio de convergencia $\epsilon_k=0.00>0$. Se aplica entonces el algoritmo k -medias difusas al conjunto de datos de interés OVS, correspondientes a $s=1$, utilizando una matriz U inicial arbitraria, ya sea convencional o difusa, hasta que se cumpla el criterio de convergencia ϵ_k .

Paso 2. Se repite el Paso 1, utilizando como solución inicial los elementos $U=\mu_{ki}$ obtenidos en ese paso, en el conjunto de datos OVS correspondientes a $s=2$, hasta que se alcance, nuevamente, el criterio ϵ_k previamente establecido.

Paso 3. Se repite el Paso 2 hasta que éste se haya realizado para todas las S situaciones.

Paso 4. Se establece $\{w_1, \dots, w_S\}$, el conjunto de parámetros de ponderación, para aplicar el Teorema CDOVS. Se elige la norma inducida por un producto interno como la distancia euclidiana: $d_{ik}=(d_i^{(s)}, v_k^{(s)})$ asociada a las S soluciones de convergencia obtenidas con los valores de los parámetros (ϵ_k, α) ya utilizados, para encontrar los valores μ_{ki} del objeto i a la clase difusa $k=1,2, \dots, K$, de acuerdo al Teorema CDOVS.

Paso 5. Una vez obtenidos los valores de pertenencia difusa (μ_{ki}) , entonces el objeto i es asignado a la clase k si $\mu_{ki} > \mu_{pi}$ para $k \neq p$ con $1 \leq k, p \leq K$.

2.2 Estudio de clasificación a escala reducida

En esta etapa consideramos únicamente el caso de las dos primeras variables:

X_1 : Años de educación formal (población de 15 a 64 años),

X_2 : PIB per cápita.

De esta manera es posible realizar una descripción gráfica del comportamiento de los datos OVS en el espacio bidimensional $R^{V=2}$. En el Cuadro 2 se muestran los datos OVS para los 20 países, ($O=20$), con estas 2 variables $V=2$, y para las 3 situaciones ($S=3$).

Cuadro 2

Subconjunto del conjunto de datos OVS: $X_{ij}^{(s)}$ para $j=1$ (Años de educación formal en la población de 15 a 64 años) y $j=2$ (PIB per cápita), correspondientes a las situaciones $s=1$ (1950), $s=2$ (1973) y $s=3$ (1992) para 20 países miembros de la OCDE

| País | Objeto | Año 1950 | | Año 1973 | | Año 1992 | |
|----------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | X_{i1} | X_{i2} | X_{i1} | X_{i2} | X_{i1} | X_{i2} |
| Bélgica | 1 | 9.83 | 5346 | 11.99 | 11905 | 15.24 | 17165 |
| Francia | 2 | 9.58 | 5221 | 11.69 | 12940 | 15.96 | 17959 |
| Alemania | 3 | 10.4 | 4281 | 11.55 | 13152 | 12.17 | 19351 |

Continúa...

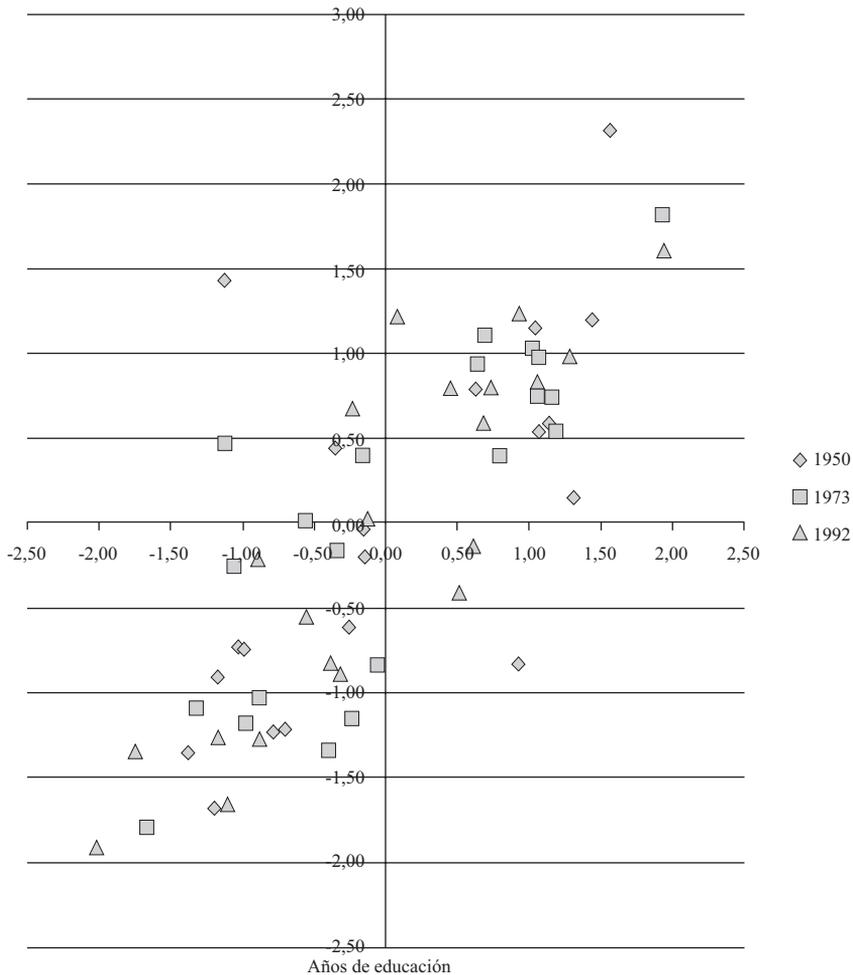
| <i>País</i> | <i>Objeto</i> | <i>Año</i> | | <i>Año</i> | | <i>Año</i> | |
|--------------|---------------|------------|----------|------------|----------|------------|----------|
| | | X_{i1} | X_{i2} | X_{i1} | X_{i2} | X_{i1} | X_{i2} |
| Países Bajos | 5 | 8.12 | 5850 | 10.27 | 12763 | 13.34 | 16898 |
| Suecia | 6 | 9.5 | 6738 | 10.44 | 13494 | 14.24 | 16927 |
| Reino Unido | 7 | 10.84 | 6847 | 11.66 | 11992 | 14.09 | 15738 |
| Portugal | 8 | 2.53 | 2132 | 4.62 | 7568 | 9.11 | 11130 |
| España | 9 | 5.13 | 2397 | 6.29 | 8739 | 11.51 | 12498 |
| EUA | 10 | 11.27 | 9573 | 14.58 | 16607 | 18.04 | 21558 |
| Argentina | 11 | 4.8 | 4987 | 7.04 | 7970 | 10.7 | 7616 |
| Brasil | 12 | 2.05 | 1673 | 3.77 | 3913 | 6.41 | 4637 |
| Chile | 13 | 5.47 | 3827 | 7.98 | 5028 | 10.93 | 7238 |
| Colombia | 14 | 2.66 | 2089 | 4.91 | 3539 | 9.14 | 5025 |
| México | 15 | 2.6 | 2085 | 5.22 | 4189 | 8.22 | 5112 |
| Venezuela. | 16 | 2.21 | 7424 | 4.41 | 10717 | 10.18 | 9163 |
| India | 17 | 1.35 | 597 | 2.6 | 853 | 5.55 | 1348 |
| Japón | 18 | 9.11 | 1873 | 12.09 | 11017 | 14.86 | 19425 |
| Corea | 19 | 3.36 | 876 | 6.82 | 2840 | 13.55 | 10010 |
| Taiwán | 20 | 3.62 | 922 | 7.35 | 3669 | 13.83 | 11590 |

Fuente: (Maddison, 1997).

Cuadro 3
Conjunto de datos OVS estandarizados del Cuadro 2

| <i>País</i> | <i>Objeto</i> | <i>Año</i> | | <i>Año</i> | | <i>Año</i> | |
|--------------|---------------|------------|----------|------------|----------|------------|----------|
| | | X_{i1} | X_{i2} | X_{i1} | X_{i2} | X_{i1} | X_{i2} |
| Bélgica | 1 | 1.14 | 0.59 | 1.16 | 0.74 | 1.06 | 0.84 |
| Francia | 2 | 1.07 | 0.53 | 1.07 | 0.98 | 1.28 | 0.98 |
| Alemania | 3 | 1.31 | 0.15 | 1.03 | 1.03 | 0.08 | 1.22 |
| Italia | 4 | -0.15 | -0.20 | -0.16 | 0.40 | -0.23 | 0.68 |
| Países Bajos | 5 | 0.63 | 0.79 | 0.64 | 0.94 | 0.45 | 0.80 |
| Suecia | 6 | 1.04 | 1.15 | 0.69 | 1.11 | 0.74 | 0.80 |
| Reino Unido | 7 | 1.44 | 1.20 | 1.06 | 0.76 | 0.69 | 0.59 |
| Portugal | 8 | -1.03 | -0.72 | -1.06 | -0.25 | -0.89 | -0.21 |
| EUA | 10 | 1.57 | 2.31 | 1.94 | 1.82 | 1.95 | 1.61 |
| Argentina | 11 | -0.36 | 0.44 | -0.33 | -0.16 | -0.39 | -0.82 |
| Brasil | 12 | -1.17 | -0.91 | -1.32 | -1.09 | -1.75 | -1.34 |
| Chile | 13 | -0.16 | -0.03 | -0.05 | -0.83 | -0.31 | -0.89 |
| Colombia | 14 | -0.99 | -0.74 | -0.97 | -1.18 | -0.88 | -1.27 |
| México | 15 | -1.01 | -0.74 | -0.88 | -1.03 | -1.17 | -1.26 |
| Venezuela. | 16 | -1.13 | 1.43 | -1.12 | 0.47 | -0.55 | -0.55 |
| India | 17 | -1.38 | -1.35 | -1.67 | -1.79 | -2.02 | -1.91 |
| Japón | 18 | 0.93 | -0.83 | 1.19 | 0.54 | 0.94 | 1.24 |
| Corea | 19 | -0.78 | -1.24 | -0.40 | -1.34 | 0.52 | -0.40 |
| Taiwán | 20 | -0.71 | -1.22 | -0.24 | -1.15 | 0.61 | -0.13 |

Gráfica 3
Diagramas de dispersión para los datos estandarizados
por separado del Cuadro 4



En consecuencia, el problema de clasificación se considera como un problema de optimización de tres criterios en (14), además, como todos los valores deben ser comparables los trabajaremos en forma estandarizada: con media cero ($\mu=0$) y varianza uno ($\sigma^2=1$), respecto a cada variable j y para cada situación s . Se

obtiene entonces, primero el Cuadro 3 con los datos OVS estandarizados del Cuadro 2, y los diagramas de dispersión correspondientes: PIB per cápita *versus* Años de educación formal, en la Gráfica 3.

En los diagramas de dispersión de la Gráfica 3 se puede confirmar, en general, la existencia de tres clases ($K = 3$) durante los tres años comprendidos en el estudio; aunque con algunos casos disímbolos, por ejemplo, Japón y Venezuela en 1950, India en 1973 y Taiwán y Corea en 1992; es claro que, a lo largo de casi todo el horizonte, se observa aparentemente un grupo conformado sólo por un país: EUA.

Adicionalmente, se puede afirmar que, al no disponer de información adicional para ponderar más una situación temporal que otra, se postulan ponderaciones equitativas $\omega^{(s)}$, de acuerdo con el criterio de Laplace ya mencionado. Se asignan de manera equitativa los niveles de pertenencia iniciales para la matriz difusa $U = (\mu_{ki})$, y se establece el criterio de convergencia $\varepsilon_K = 0.005$, para detener el procedimiento algorítmico en 8, 8 y 10 iteraciones, respectivamente. Los resultados obtenidos se muestran en los cuadros 4, 5 y 6.

En estos resultados parciales se observa cómo se llegan a definir las tres clases, por ejemplo la Clase 1 formada por: Bélgica, Francia, Alemania, Países Bajos, Suecia, Reino Unido y EUA; mientras que la Clase 2 consta de: Italia, España, Argentina, Chile, Venezuela y Japón. Se observa que México, al igual que Portugal, Brasil, Colombia, India, Corea y Taiwán, pertenece a la Clase 3 con $\mu_{ki}=0.968$. Un resultado similar se encuentra para la matriz U de pertenencias difusas para los casos de los datos OVS correspondientes a 1973 y 1992, como se muestra en los cuadros 5 y 6.

En los cuadros 4, 5 y 6 se observan, en negritas, los valores de pertenencia correspondientes a los líderes de cada clase; por ejemplo, para 1950 son: Suecia (0.967), Chile (0.985) y Brasil (0.973); para 1973: Francia 1.000), España 1.000) y Colombia (0.993); y para 1992 son: Suecia (0.983), Venezuela (0.910) y Brasil (0.968). Se denotan cambios importantes, por ejemplo de 1973 a 1992 cambian de la Clase 3 a la Clase 2: Chile, Corea y Taiwán. También, en 1992, Suecia y Brasil vuelven a ser líderes de la Clase 1 y de la Clase 3, respectivamente. En el análisis global de la evolución económica, durante el periodo completo que incluye a las tres situaciones temporales, 1950-1993-1992, se asignan ponderaciones equitativas, $\omega^{(s)} = 1/3$, de manera que el criterio de convergencia se alcanza en 8 iteraciones, al aplicar el Paso 4 del algoritmo difuso de clasificación para datos OVS, con $\varepsilon_K = 0.00429231$, son los mostrados en el Cuadro 7.

Cuadro 4
Matriz de pertenencias final: difusa y convencional
para los datos OVS de 1950

| <i>País</i> | <i>Matriz U final difusa</i> | | | <i>Matriz U final rígida</i> | | |
|--------------|------------------------------|----------------|----------------|------------------------------|----------------|----------------|
| | <i>Clase 1</i> | <i>Clase 2</i> | <i>Clase 3</i> | <i>Clase 1</i> | <i>Clase 2</i> | <i>Clase 3</i> |
| Bélgica | 0.936 | 0.049 | 0.014 | 1 | 0 | 0 |
| Francia | 0.905 | 0.074 | 0.021 | 1 | 0 | 0 |
| Alemania | 0.730 | 0.200 | 0.070 | 1 | 0 | 0 |
| Italia | 0.026 | 0.914 | 0.060 | 0 | 1 | 0 |
| Países Bajos | 0.786 | 0.177 | 0.037 | 1 | 0 | 0 |
| Suecia | 0.967 | 0.025 | 0.008 | 1 | 0 | 0 |
| Reino Unido | 0.939 | 0.044 | 0.017 | 1 | 0 | 0 |
| Portugal | 0.006 | 0.034 | 0.960 | 0 | 0 | 1 |
| España | 0.060 | 0.514 | 0.426 | 0 | 1 | 0 |
| EUA | 0.716 | 0.193 | 0.091 | 1 | 0 | 0 |
| Argentina | 0.058 | 0.880 | 0.062 | 0 | 1 | 0 |
| Brasil | 0.005 | 0.022 | 0.973 | 0 | 0 | 1 |
| Chile | 0.005 | 0.985 | 0.010 | 0 | 1 | 0 |
| Colombia | 0.005 | 0.027 | 0.968 | 0 | 0 | 1 |
| México | 0.005 | 0.027 | 0.968 | 0 | 0 | 1 |
| Venezuela | 0.255 | 0.502 | 0.243 | 0 | 1 | 0 |
| India | 0.027 | 0.087 | 0.886 | 0 | 0 | 1 |
| Japón | 0.299 | 0.446 | 0.255 | 0 | 1 | 0 |
| Corea | 0.014 | 0.054 | 0.932 | 0 | 0 | 1 |
| Taiwán | 0.017 | 0.068 | 0.915 | 0 | 0 | 1 |

En el análisis global de la evolución económica, durante el periodo completo que incluye a las tres situaciones temporales, 1950-1993-1992, se asignan ponderaciones equitativas, $\omega^{(s)} = 1/3$, de manera que el criterio de convergencia se alcanza en 8 iteraciones, al aplicar el Paso 4 del algoritmo difuso de clasificación para datos OVS, con $\varepsilon_K = 0.00429231$, son los mostrados en el Cuadro 7.

Se observa en el Cuadro 7 que, durante todo el horizonte de estudio 1950-1992, se perfilan Bélgica, España y México como líderes de la Clase 1, de la Clase 2 y de la Clase 3, respectivamente; mientras que México se mantiene en la Clase 3 con un nivel de pertenencia aproximado de 0.701.

Cuadro 5
Matriz de pertenencias final: difusa y convencional
para los datos OVS de 1973

| <i>País</i> | <i>Matriz U final difusa</i> | | | <i>Matriz U final rígida</i> | | |
|--------------|------------------------------|----------------|----------------|------------------------------|----------------|----------------|
| | <i>Clase 1</i> | <i>Clase 2</i> | <i>Clase 3</i> | <i>Clase 1</i> | <i>Clase 2</i> | <i>Clase 3</i> |
| Bélgica | 0.979 | 0.015 | 0.007 | 1 | 0 | 0 |
| Francia | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Alemania | 0.997 | 0.002 | 0.001 | 1 | 0 | 0 |
| Italia | 0.140 | 0.777 | 0.083 | 0 | 1 | 0 |
| Países Bajo | 0.907 | 0.069 | 0.024 | 1 | 0 | 0 |
| Suecia | 0.927 | 0.053 | 0.019 | 1 | 0 | 0 |
| Reino Unido. | 0.984 | 0.011 | 0.005 | 1 | 0 | 0 |
| Portugal | 0.037 | 0.719 | 0.244 | 0 | 1 | 0 |
| España | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| EUA | 0.801 | 0.127 | 0.072 | 1 | 0 | 0 |
| Argentina | 0.025 | 0.917 | 0.058 | 0 | 1 | 0 |
| Brasil | 0.018 | 0.101 | 0.881 | 0 | 0 | 1 |
| Chile | 0.091 | 0.410 | 0.499 | 0 | 0 | 1 |
| Colombia | 0.001 | 0.006 | 0.993 | 0 | 0 | 1 |
| México | 0.003 | 0.021 | 0.975 | 0 | 0 | 1 |
| Venezuela | 0.080 | 0.777 | 0.143 | 0 | 1 | 0 |
| India | 0.051 | 0.173 | 0.776 | 0 | 0 | 1 |
| Japón | 0.925 | 0.051 | 0.024 | 1 | 0 | 0 |
| Corea | 0.029 | 0.117 | 0.854 | 0 | 0 | 1 |
| Taiwán | 0.050 | 0.209 | 0.741 | 0 | 0 | 1 |

Cuadro 6
Matriz de pertenencias final: difusa y convencional
para los datos OVS de 1992

| <i>País</i> | <i>Matriz U final difusa</i> | | | <i>Matriz U final rígida</i> | | |
|--------------|------------------------------|----------------|----------------|------------------------------|----------------|----------------|
| | <i>Clase 1</i> | <i>Clase 2</i> | <i>Clase 3</i> | <i>Clase 1</i> | <i>Clase 2</i> | <i>Clase 3</i> |
| Bélgica | 0.982 | 0.014 | 0.004 | 1 | 0 | 0 |
| Francia | 0.946 | 0.041 | 0.013 | 1 | 0 | 0 |
| Alemania | 0.754 | 0.190 | 0.056 | 1 | 0 | 0 |
| Italia | 0.437 | 0.470 | 0.093 | 0 | 1 | 0 |
| Países Bajos | 0.894 | 0.086 | 0.019 | 1 | 0 | 0 |
| Suecia | 0.983 | 0.013 | 0.003 | 1 | 0 | 0 |
| Reino Unido | 0.914 | 0.071 | 0.015 | 1 | 0 | 0 |
| Portugal | 0.075 | 0.740 | 0.185 | 0 | 1 | 0 |
| España | 0.094 | 0.862 | 0.044 | 0 | 1 | 0 |
| EUA | 0.792 | 0.146 | 0.062 | 1 | 0 | 0 |
| Argentina | 0.036 | 0.853 | 0.111 | 0 | 1 | 0 |

Continúa...

| <i>País</i> | <i>Matriz U final difusa</i> | | | <i>Matriz U final rígida</i> | | |
|-------------|------------------------------|----------------|----------------|------------------------------|----------------|----------------|
| | <i>Clase 1</i> | <i>Clase 2</i> | <i>Clase 3</i> | <i>Clase 1</i> | <i>Clase 2</i> | <i>Clase 3</i> |
| Brasil | 0.007 | 0.025 | 0.968 | 0 | 0 | 1 |
| Chile | 0.043 | 0.831 | 0.126 | 0 | 1 | 0 |
| Colombia | 0.034 | 0.231 | 0.734 | 0 | 0 | 1 |
| México | 0.012 | 0.065 | 0.923 | 0 | 0 | 1 |
| Venezuela | 0.025 | 0.910 | 0.065 | 0 | 1 | 0 |
| India | 0.030 | 0.090 | 0.880 | 0 | 0 | 1 |
| Japón | 0.970 | 0.023 | 0.007 | 1 | 0 | 0 |
| Corea | 0.217 | 0.699 | 0.083 | 0 | 1 | 0 |
| Taiwán | 0.374 | 0.551 | 0.075 | 0 | 1 | 0 |

Cuadro 7
Matriz de pertenencias final: difusa y convencional
para los datos OVS de 1950-1992

| <i>País</i> | <i>Matriz U global interacción 6</i> | | | <i>Matriz U global inter. 6 (rígida)</i> | | |
|--------------|--------------------------------------|------------------|------------------|--|----------------|----------------|
| | <i>Clase 1</i> | <i>Clase 2</i> | <i>Clase 3</i> | <i>Clase 1</i> | <i>Clase 2</i> | <i>Clase 3</i> |
| Bélgica | 0.7938793 | 0.1220575 | 0.0840632 | 1 | 0 | 0 |
| Francia | 0.7665490 | 0.1384857 | 0.0949653 | 1 | 0 | 0 |
| Alemania | 0.6358922 | 0.2188296 | 0.1452782 | 1 | 0 | 0 |
| Italia | 0.2459985 | 0.5234417 | 0.2305598 | 0 | 1 | 0 |
| Países Bajos | 0.7183977 | 0.1751156 | 0.1064867 | 1 | 0 | 0 |
| Suecia | 0.7669988 | 0.1406294 | 0.0923718 | 1 | 0 | 0 |
| Reino Unido | 0.7191885 | 0.1694645 | 0.1113471 | 1 | 0 | 0 |
| Portugal | 0.1271006 | 0.3155308 | 0.5573685 | 0 | 0 | 1 |
| España | 0.1536121 | 0.5638113 | 0.2825766 | 0 | 1 | 0 |
| EUA | 0.5149935 | 0.2729680 | 0.2120385 | 1 | 0 | 0 |
| Argent. | 0.1625412 | 0.4932282 | 0.3442307 | 0 | 1 | 0 |
| Brasil | 0.1420922 | 0.2717546 | 0.5861532 | 0 | 0 | 1 |
| Chile | 0.1455042 | 0.4867800 | 0.3677157 | 0 | 1 | 0 |
| Colombia | 0.0949620 | 0.2097710 | 0.6952670 | 0 | 0 | 1 |
| México | 0.0932384 | 0.2057721 | 0.7009896 | 0 | 0 | 1 |
| Venezuela | 0.2298697 | 0.3912502 | 0.3788801 | 0 | 1 | 0 |
| India | 0.1850534 | 0.3081968 | 0.5067498 | 0 | 0 | 1 |
| Japón | 0.5395185 | 0.2752074 | 0.1852741 | 1 | 0 | 0 |
| Corea | 0.1832171 | 0.3777823 | 0.4390006 | 0 | 0 | 1 |
| Taiwán | 0.1981064 | 0.3977409 | 0.4041528 | 0 | 0 | 1 |

Cuadro 8
Valores para México de las distancias a los centroides para cada año
en el estudio global, que incluye a los 20 países durante todo
el periodo 1950-1992

| <i>Año</i> | <i>Al centroide 1</i> | <i>Al centroide 2</i> | <i>Al centroide 3</i> |
|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1950 | 2.41703229 | 0.89182056 | 0.24315124 |
| 1973 | 2.56900853 | 1.00649015 | 0.25528754 |
| 1992 | 2.83238535 | 1.46036888 | 0.59145644 |

Además, se puede verificar que:

1. Los tres líderes de las clases: Bélgica, España y México, se han mantenido dentro de sus correspondientes clases durante todo el horizonte temporal.
2. En la Clase 3, EUA tiene la menor pertenencia (0.5149935) del total de los ocho países integrantes, confirmando su posible aislamiento en esta clase.
3. En el Cuadro 8 se muestran los valores de las distancias de México a los respectivos centroides de las tres clases para 1950, 1973 y 1992 durante todo el horizonte. Se observa el proceso de que, mientras que el patrón de evolución general es hacia el primer cuadrante, México muestra una tendencia hacia el tercer cuadrante, pues sus distancias aumentan en ese sentido, considerando sus respectivos valores estandarizados mostrados en el Cuadro 3 y en la Gráfica 3.

2.2.1 Conclusiones del estudio a escala reducida

El comportamiento observado en este primer estudio para las dos variables consideradas, no necesariamente coincide con el estudio completo que se muestra enseguida, que incluye a las cuatro variables aunque, dada la gran correlación entre las tres variables X_2 : PIB per cápita, X_3 : PIB por hora trabajada y X_4 : PIB por persona empleada, es de esperar cierta consistencia en ambos casos. Esperamos entonces confirmar estos resultados al generalizar el estudio al caso de las cuatro variables en el estudio de clasificación a escala completa.

Por ejemplo, para realizar estudios de simulación sobre posibles escenarios económicos de México cuando se modifican, como resultado de la implementación de políticas económicas o sociales, algunos de los valores numéricos de las variables manejadas en este estudio; lo cual será desarrollado en la parte final de este trabajo.

2.3 Estudio completo de clasificación

En esta parte del trabajo se realiza el procedimiento de clasificación para el conjunto completo de las cuatro variables definidas previamente:

- X_1 : Años de educación formal (población de 15 a 64 años),
- X_2 PIB per cápita,
- X_3 : PIB/hora trabajada,
- X_4 : PIB/ persona empleada,
- S: Las tres situaciones temporales: $s_1=1950$, $s_2=1973$, $s_3=1992$.

En el Cuadro 9 se muestra el total de $20 * 4 * 3 = 240$ valores originales, y en el Cuadro 10 los correspondientes valores estandarizados. Nuevamente se asignan de manera equitativa los niveles de pertenencia iniciales para la matriz difusa $U=(\mu_{ki})$, se establece ahora el criterio de convergencia $\varepsilon_K=0.03$, y se procede a aplicar los Pasos 1, 2 y 3 del algoritmo CDOVS. Al terminar de aplicar el algoritmo para las tres situaciones temporales, los correspondientes resultados de convergencia obtenidos se alcanzan en 9, 5 y 7 iteraciones, respectivamente; como se muestra en el Cuadro 11. Una vez obtenidos los valores de pertenencia μ_{ki} , se procede a utilizar los correspondientes centroides de cada matriz U de convergencia encontrada, para aplicar el Paso 4; en este caso se asignan ponderaciones equitativas, $\omega^{(s)}=1/3$, de manera que el criterio de convergencia se alcanza en 7 iteraciones, los resultados encontrados para U se muestran también en el Cuadro 11.

2.3.1 Análisis de resultados

En el Cuadro 11 se muestran los países integrantes de cada una de las tres clases difusas obtenidas al aplicar el algoritmo CDOVS. Se observa ahí cómo Venezuela pasa de la Clase 1 en 1950 (0.476) a la Clase 2 en 1973 (0.453); en la cual termina en 1992 (0.817) al igual que en la clasificación Global (0.368). Inversamente, el caso más notable es Japón, este país pasó de la Clase 3 en 1950 (0.487), a la Clase 1 en 1973 (0.537), y se observa cómo refuerza su pertenencia en 1992 (0.876). Se denota asimismo que México se ha mantenido durante todo el horizonte de estudio dentro de la Clase 3, y que incluso se convierte, en la clasificación Global, en líder de esta clase, con una pertenencia de 0.611; tal resultado es consistente con el hecho de que las correspondientes distancias de México a cada uno de los tres centroides, en general, aumentan como se muestra en el Cuadro 12, sobre todo respecto a la Clase 1. El caso excepcional de Japón es utilizado en este trabajo para

realizar estudios de simulación al suponer en México niveles similares de educación formal (variable X_1) para los años 1950, 1993 y 1992. En este caso particular se observa cómo al realizar estos cambios en los horizontes más lejanos de tiempo (1950), los niveles de pertenencia a la Clase 3 se reducen más drásticamente que al realizarlos en los horizontes más cercanos de tiempo (1973 o 1992), lo que indica el tiempo considerable de maduración de los cambios en este tipo de políticas educativas en un país.

3. Estudios de simulación

Se examinan ahora algunos posibles patrones de evolución de la economía de México, cuando se realizan cambios en los valores asignados a las variables consideradas en el estudio, este examen es posible pues las variables incluidas no son aleatorias sino difusas, por lo que no se requiere validar procedimientos de inferencia estadística.

Se proponen los cambios planteados enseguida pero, por razones de tiempo, sólo se analizan los cambios enunciados para la variable X_1 en cada caso.

1) En el estudio a escala reducida:

- a) El nivel de la variable X_1 : Años de educación formal de México en 1950, 1993 y 1992, es igual al nivel correspondiente a Japón en 1950, es decir 9.11 años.
- b) Simultáneamente al cambio anterior, el nivel de la variable X_2 : PIB per cápita de México en 1950, 1993 y 1992 es igual al correspondiente nivel promedio anual de los países de América Latina, incluyendo a México, en la OCDE en cada uno de esos tres años, es decir: \$3,681, \$5,893 y \$6,465, respectivamente.

2) En el estudio completo:

- a) El nivel de la variable X_1 : Años de educación formal de México en 1950, 1993 y 1992 es igual al nivel correspondiente a Japón en 1950, es decir 9.11 años.
- b) Simultáneamente al cambio anterior, el nivel de la variable X_2 : PIB per cápita de México es igual al correspondiente nivel promedio anual de los países de América Latina, incluyendo a México, en la OCDE en cada uno de esos tres años, es decir; \$3,681, \$5,893 y \$6,465, respectivamente; ajustando proporcionalmente los valores correspondientes de X_3 y de X_4 . En este caso, los factores de ajuste son: 1.7655, 1.4068 y 1.2647, respectivamente.

Cuadro 9
Conjunto completo de datos originales OVS, al cual se le aplica
el algoritmo de clasificación difusa

| <i>País</i> | <i>Variables (1950)</i> | | | | <i>Variables (1973)</i> | | | | <i>Variables (1992)</i> | | | |
|--------------|-------------------------|------|-------|-------|-------------------------|-------|-------|-------|-------------------------|-------|-------|-------|
| Bélgica | 9.83 | 5346 | 6.06 | 13826 | 11.99 | 11905 | 16.53 | 30943 | 15.24 | 17165 | 28.55 | 45260 |
| Francia | 9.58 | 5221 | 5.65 | 11108 | 11.69 | 12940 | 17.77 | 31464 | 15.96 | 17959 | 29.62 | 45678 |
| Alemania | 10.4 | 4281 | 4.37 | 10110 | 11.55 | 13152 | 16.64 | 30012 | 12.17 | 19351 | 27.55 | 43061 |
| Italia | 5.49 | 3425 | 4.28 | 8548 | 7.62 | 10409 | 15.58 | 25110 | 11.2 | 16229 | 24.59 | 36632 |
| Países Bajos | 8.12 | 5850 | 6.5 | 14361 | 10.27 | 12763 | 19.02 | 33304 | 13.34 | 16898 | 28.8 | 38538 |
| Suecia | 9.5 | 6738 | 7.08 | 13814 | 10.44 | 13494 | 18.02 | 28307 | 14.24 | 16927 | 23.11 | 35016 |
| Reino Unido | 10.84 | 6847 | 7.86 | 15395 | 11.66 | 11992 | 15.92 | 26882 | 14.09 | 15738 | 23.98 | 35751 |
| Portugal | 2.53 | 2132 | 2.58 | 5678 | 4.62 | 7568 | 9.86 | 18736 | 9.11 | 11130 | 14.06 | 23900 |
| España | 5.13 | 2397 | 2.6 | 5727 | 6.29 | 8739 | 10.86 | 23346 | 11.51 | 12498 | 20.22 | 38639 |
| EUA | 11.27 | 9573 | 12.66 | 23643 | 14.58 | 16607 | 23.45 | 40526 | 18.04 | 21558 | 29.1 | 46242 |
| Argentina | 4.8 | 4987 | 6.16 | 12538 | 7.04 | 7970 | 10.7 | 21349 | 10.7 | 7616 | 11.86 | 21666 |
| Brasil | 2.05 | 1673 | 2.41 | 4922 | 3.77 | 3913 | 5.62 | 11781 | 6.41 | 4637 | 6.66 | 12366 |
| Chile | 5.47 | 3827 | 4.66 | 10316 | 7.98 | 5028 | 8.9 | 17404 | 10.93 | 7238 | 10.66 | 21375 |
| Colombia | 2.66 | 2089 | 2.79 | 6492 | 4.91 | 3539 | 5.87 | 12578 | 9.14 | 5025 | 7.76 | 15124 |
| México | 2.6 | 2085 | 3.09 | 6665 | 5.22 | 4189 | 7.63 | 15728 | 8.22 | 5112 | 8.4 | 17327 |
| Venezuela | 2.21 | 7424 | 9.01 | 23791 | 4.41 | 10717 | 19.31 | 37936 | 10.18 | 9163 | 16.73 | 31255 |
| India | 1.35 | 597 | 0.6 | 1328 | 2.6 | 853 | 0.94 | 2064 | 5.55 | 1348 | 1.58 | 3482 |
| Japón | 9.11 | 1873 | 2.03 | 4387 | 12.09 | 11017 | 11.15 | 22764 | 14.86 | 19425 | 20.02 | 37526 |
| Corea | 3.36 | 876 | 1.28 | 2823 | 6.82 | 2840 | 3.22 | 8651 | 13.55 | 10010 | 8.48 | 23749 |
| Taiwán | 3.62 | 922 | 1.17 | 2530 | 7.35 | 3669 | 4.13 | 10625 | 13.83 | 11590 | 11.06 | 27659 |

Cuadro 10
Valores estandarizados del conjunto completo de datos OVS dados
en el Cuadro 8

| <i>País</i> | X_{i1} | X_{i2} | X_{i3} | X_{i4} | X_{i1} | X_{i2} | X_{i3} | X_{i4} | X_{i1} | X_{i2} | X_{i3} | X_{i4} |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Bélgica | 1.140 | 0.586 | 0.480 | 0.635 | 1.157 | 0.744 | 0.731 | 0.847 | 1.056 | 0.842 | 1.247 | 1.279 |
| Francia | 1.066 | 0.535 | 0.341 | 0.195 | 1.067 | 0.981 | 0.933 | 0.899 | 1.285 | 0.980 | 1.369 | 1.314 |
| Alemania | 1.310 | 0.152 | -0.092 | 0.034 | 1.025 | 1.030 | 0.748 | 0.754 | 0.081 | 1.223 | 1.132 | 1.095 |
| Italia | -0.150 | -0.197 | -0.123 | -0.219 | -0.158 | 0.400 | 0.575 | 0.263 | -0.227 | 0.679 | 0.794 | 0.555 |
| Países Bajos | 0.632 | 0.791 | 0.629 | 0.722 | 0.640 | 0.940 | 1.137 | 1.083 | 0.453 | 0.795 | 1.275 | 0.715 |
| Suecia | 1.042 | 1.153 | 0.826 | 0.633 | 0.691 | 1.108 | 0.974 | 0.583 | 0.739 | 0.800 | 0.625 | 0.420 |
| Reino Unido | 1.440 | 1.197 | 1.090 | 0.889 | 1.058 | 0.764 | 0.631 | 0.441 | 0.691 | 0.593 | 0.724 | 0.481 |
| Portugal | -1.031 | -0.724 | -0.698 | -0.683 | -1.061 | -0.252 | -0.359 | -0.374 | -0.890 | -0.209 | -0.409 | -0.513 |
| España | -0.258 | -0.616 | -0.691 | -0.675 | -0.558 | 0.017 | -0.195 | 0.087 | -0.128 | 0.029 | 0.295 | 0.724 |
| EUA | 1.568 | 2.308 | 2.715 | 2.224 | 1.937 | 1.823 | 1.860 | 1.805 | 1.945 | 1.607 | 1.310 | 1.361 |
| Argentina | -0.356 | 0.440 | 0.514 | 0.427 | -0.333 | -0.160 | -0.221 | -0.113 | -0.385 | -0.821 | -0.660 | -0.700 |
| Brasil | -1.173 | -0.911 | -0.756 | -0.806 | -1.317 | -1.091 | -1.051 | -1.070 | -1.748 | -1.340 | -1.255 | -1.480 |
| Chile | -0.156 | -0.033 | 0.006 | 0.067 | -0.050 | -0.835 | -0.515 | -0.507 | -0.312 | -0.887 | -0.798 | -0.724 |
| Colombia | -0.992 | -0.741 | -0.627 | -0.552 | -0.974 | -1.177 | -1.010 | -0.990 | -0.881 | -1.272 | -1.129 | -1.249 |
| México | -1.010 | -0.743 | -0.526 | -0.524 | -0.881 | -1.027 | -0.723 | -0.675 | -1.173 | -1.257 | -1.056 | -1.064 |
| Venezuela | -1.126 | 1.432 | 1.479 | 2.248 | -1.124 | 0.471 | 1.184 | 1.546 | -0.550 | -0.552 | -0.104 | 0.104 |
| India | -1.382 | -1.349 | -1.369 | -1.387 | -1.669 | -1.793 | -1.815 | -2.041 | -2.021 | -1.913 | -1.835 | -2.225 |
| Japón | 0.926 | -0.829 | -0.884 | -0.892 | 1.188 | 0.540 | -0.148 | 0.029 | 0.936 | 1.235 | 0.272 | 0.630 |
| Corea | -0.784 | -1.235 | -1.138 | -1.145 | -0.399 | -1.337 | -1.443 | -1.383 | 0.520 | -0.404 | -1.047 | -0.525 |
| Taiwán | -0.707 | -1.217 | -1.176 | -1.193 | -0.239 | -1.147 | -1.294 | -1.185 | 0.609 | -0.129 | -0.752 | -0.197 |

Cuadro 11
Matriz difusa U obtenida para cada una de las tres situaciones temporales y para el caso global en el estudio completo

| País | X_{i1} | X_{i2} | X_{i3} | X_{i4} | X_{i1} | X_{i2} | X_{i3} | X_{i4} | X_{i1} | X_{i2} | X_{i3} | X_{i4} |
|--------------|--------------|--------------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | (1950) | | | | (1973) | | | | (1992) | | | |
| Bélgica | 0.661 | 0.298 | 0.041 | 0.968 | 0.024 | 0.008 | 0.951 | 0.036 | 0.013 | 0.716 | 0.163 | 0.121 |
| Francia | 0.411 | 0.525 | 0.064 | 0.997 | 0.002 | 0.001 | 0.923 | 0.055 | 0.022 | 0.672 | 0.187 | 0.140 |
| Alemania | 0.301 | 0.575 | 0.124 | 0.989 | 0.008 | 0.003 | 0.904 | 0.070 | 0.026 | 0.614 | 0.222 | 0.164 |
| Italia | 0.072 | 0.718 | 0.210 | 0.263 | 0.670 | 0.067 | 0.735 | 0.205 | 0.060 | 0.332 | 0.428 | 0.240 |
| Países Bajos | 0.678 | 0.292 | 0.030 | 0.944 | 0.043 | 0.013 | 0.955 | 0.034 | 0.012 | 0.719 | 0.163 | 0.118 |
| Suecia | 0.943 | 0.048 | 0.008 | 0.951 | 0.039 | 0.010 | 0.917 | 0.065 | 0.018 | 0.717 | 0.164 | 0.119 |
| Reino Unido | 0.943 | 0.046 | 0.011 | 0.910 | 0.071 | 0.019 | 0.916 | 0.066 | 0.018 | 0.681 | 0.184 | 0.135 |
| Portugal | 0.009 | 0.029 | 0.962 | 0.053 | 0.738 | 0.209 | 0.063 | 0.788 | 0.148 | 0.124 | 0.358 | 0.519 |
| España | 0.040 | 0.161 | 0.799 | 0.007 | 0.984 | 0.009 | 0.478 | 0.432 | 0.090 | 0.205 | 0.475 | 0.320 |
| EUA | 0.645 | 0.247 | 0.107 | 0.760 | 0.164 | 0.076 | 0.827 | 0.120 | 0.053 | 0.485 | 0.280 | 0.236 |
| Argentina | 0.117 | 0.824 | 0.059 | 0.011 | 0.973 | 0.016 | 0.024 | 0.879 | 0.097 | 0.169 | 0.472 | 0.359 |
| Brasil | 0.007 | 0.022 | 0.971 | 0.013 | 0.059 | 0.928 | 0.005 | 0.022 | 0.973 | 0.160 | 0.315 | 0.525 |
| Chile | 0.043 | 0.890 | 0.067 | 0.079 | 0.530 | 0.391 | 0.029 | 0.844 | 0.127 | 0.132 | 0.410 | 0.458 |
| Colombia | 0.014 | 0.050 | 0.936 | 0.004 | 0.019 | 0.977 | 0.019 | 0.145 | 0.836 | 0.128 | 0.284 | 0.588 |
| México | 0.020 | 0.072 | 0.908 | 0.029 | 0.182 | 0.789 | 0.015 | 0.108 | 0.878 | 0.116 | 0.273 | 0.611 |
| Venezuela | 0.476 | 0.369 | 0.155 | 0.411 | 0.453 | 0.136 | 0.088 | 0.817 | 0.094 | 0.334 | 0.368 | 0.299 |
| India | 0.039 | 0.091 | 0.870 | 0.058 | 0.150 | 0.792 | 0.039 | 0.124 | 0.837 | 0.210 | 0.336 | 0.454 |
| Japón | 0.146 | 0.367 | 0.487 | 0.537 | 0.352 | 0.111 | 0.876 | 0.095 | 0.030 | 0.405 | 0.334 | 0.262 |
| Corea | 0.015 | 0.039 | 0.946 | 0.019 | 0.061 | 0.920 | 0.078 | 0.816 | 0.106 | 0.177 | 0.348 | 0.475 |
| Taiwán | 0.018 | 0.047 | 0.935 | 0.024 | 0.087 | 0.889 | 0.125 | 0.790 | 0.085 | 0.183 | 0.365 | 0.452 |

Cuadro 12
Distancias de México a los centroides de cada clase en el periodo de estudio

| Año | Centroide 1 | Centroide 2 | Centroide 3 |
|------|-------------|-------------|-------------|
| 1950 | 1.153 | 0.608 | 0.171 |
| 1973 | 1.172 | 0.470 | 0.226 |
| 1992 | 1.344 | 0.501 | 0.175 |

3.1 Resultados del estudio de simulación

En el primer caso del estudio a escala reducida: es decir, haciendo $X_{15,1}=911$ años de educación formal de México en 1950, 1993 y 1992; se obtienen los resultados mostrados en el Cuadro 13, en cada uno de los escenarios: 1950, 1993, 1992 y para el caso global, en 6, 4, 9 y 6 iteraciones, respectivamente. Se confirma que, al realizar el cambio en 1950, México pasa de la Clase 3 a la Clase 2, y que su pertenencia

a la Clase 3 es la mínima de las tres posibles. El caso Global ocurre cuando es simulado en México el nivel de X_1 de Japón para 1950, de manera sostenida para los tres periodos de tiempo. El efecto global neto es que ahora México tiene niveles de pertenencia mayores para la Clase 2 y para la Clase 3.

Cuadro 13
Valores difusos de México en el primer caso del estudio
a escala reducida

| <i>Escenario</i> | $\mu_{15,1}$ | $\mu_{15,2}$ | $\mu_{15,3}$ |
|------------------|--------------|--------------|--------------|
| 1950 | 0.296 | 0.484 | 0.220 |
| 1973 | 0.115 | 0.287 | 0.599 |
| 1992 | 0.026 | 0.181 | 0.793 |
| Global | 0.211 | 0.397 | 0.392 |

En el segundo caso del estudio a escala reducida los resultados obtenidos se muestran en el Cuadro 14, en cada uno de los escenarios: 1950, 1993, 1992 y para el caso global en 5, 5, 4 y 6 iteraciones, respectivamente. Observamos nuevamente que, en la simulación de ambos cambios simultáneos, para 1950 México pertenece ya a la Clase 1 (0.521); en 1973 pasa a la Clase 2 (0.478), donde se mantiene en 1992 y, en el caso global, México pertenece a la Clase 2 principalmente. El efecto inicial de mayor pertenencia a la Clase 1 se diluye a lo largo del horizonte de tiempo, sin embargo se observa cómo su nivel global casi coincide con el nivel respectivo del primer caso de este estudio.

Cuadro 14
Valores difusos de México en el primer caso del estudio
a escala reducida

| <i>Escenario</i> | $\mu_{15,1}$ | $\mu_{15,2}$ | $\mu_{15,3}$ |
|------------------|--------------|--------------|--------------|
| 1950 | 0.296 | 0.484 | 0.220 |
| 1973 | 0.115 | 0.287 | 0.599 |
| 1992 | 0.026 | 0.181 | 0.793 |
| Global | 0.211 | 0.397 | 0.392 |

En el segundo caso del estudio a escala reducida los resultados obtenidos se muestran en el Cuadro 14, en cada uno de los escenarios: 1950, 1993, 1992 y para el caso global en 5, 5, 4 y 6 iteraciones, respectivamente. Observamos nuevamente que, en la simulación de ambos cambios simultáneos, para 1950 México pertenece ya a la Clase 1 (0.521); en 1973 pasa a la Clase 2 (0.478), donde se mantiene en 1992 y, en el caso global, México pertenece a la Clase 2 principalmente. El efecto

inicial de mayor pertenencia a la Clase 1 se diluye a lo largo del horizonte de tiempo, sin embargo se observa cómo su nivel global casi coincide con el nivel respectivo del primer caso de este estudio.

Cuadro 15
Valores difusos de México en el segundo caso del estudio
a escala reducida

| <i>Escenario</i> | $\mu_{15,1}$ | $\mu_{15,2}$ | $\mu_{15,3}$ |
|------------------|--------------|--------------|--------------|
| 1950 | 0.521 | 0.374 | 0.105 |
| 1973 | 0.163 | 0.478 | 0.358 |
| 1992 | 0.006 | 0.521 | 0.473 |
| Global | 0.221 | 0.423 | 0.355 |

En el primer caso del estudio con el conjunto de datos completo se obtienen los resultados mostrados en el Cuadro 15. Para el cambio en 1950, México pasa a la Clase 2, pero a partir de entonces ya pertenece significativamente a la Clase 3, incluso en el caso Global.

Cuadro 16
Valores difusos de pertenencia de México en el primer caso
del estudio completo

| <i>Escenario</i> | $\mu_{15,1}$ | $\mu_{15,2}$ | $\mu_{15,3}$ |
|------------------|--------------|--------------|--------------|
| 1950 | 0.132 | 0.556 | 0.312 |
| 1973 | 0.092 | 0.393 | 0.515 |
| 1992 | 0.023 | 0.202 | 0.774 |
| Global | 0.139 | 0.331 | 0.530 |

Los resultados obtenidos en el segundo caso del estudio completo se muestran en el Cuadro 16. Podemos apreciar que para el cambio en 1950, México entra a la Clase 2 de manera significativa, con una pertenencia menor a la Clase 3; sin embargo, su presencia en la Clase 2 se reduce paulatinamente en 1973 y en 1992. Incluso en el caso Global, se aprecia ya su pertenencia mayoritaria a la Clase 3.

Cuadro 17
Valores difusos de pertenencia de México en el segundo caso
del estudio completo

| <i>Escenario</i> | $\mu_{15,1}$ | $\mu_{15,2}$ | $\mu_{15,3}$ |
|------------------|--------------|--------------|--------------|
| 1950 | 0.052 | 0.918 | 0.030 |
| 1973 | 0.097 | 0.786 | 0.117 |
| 1992 | 0.043 | 0.671 | 0.286 |
| Global | 0.148 | 0.372 | 0.480 |

3.2 Análisis de componentes principales

Otra alternativa visual para presentar los resultados globales obtenidos, que se muestran en el Cuadro 7 y en el Cuadro 11, donde se incluyen los valores de pertenencia difusa obtenidos para los datos OVS, consiste en aplicar el Análisis de Componentes Principales (ACP) (Kaufman-Rousseeuw, 1990). En este caso, el número de componentes principales no degenerados es igual al número de clases o conglomerados menos uno, i.e. $(K-1)$; debido a que, para cada objeto, la suma de pertenencias es una constante. Consecuentemente, obtendremos en nuestro estudio dos componentes principales. Al aplicar el ACP al de datos dados en el Cuadro 7 y en el Cuadro 11, empleando el programa XLSTAT™ (Versión 2011, 4.04), se obtienen los componentes principales que se muestran en el Cuadro 17 y que se representan en la Gráfica 4, en el Cuadro 18 y en la Gráfica 5, respectivamente.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en el estudio inicial a escala reducida son consistentes con los correspondientes al estudio a escala completa, esto se debe básicamente a la correlación existente en las dos nuevas variables X_3 : PIB por hora trabajada y X_4 : PIB por persona empleada, respecto a la variable X_2 : PIB per cápita. Eso se confirma también en los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas, por ejemplo, al simular el efecto de incrementar los recursos para la educación en México al nivel de los recursos que destina Japón en 1950, se observa que México llega, en el efecto global, a tener su mayor pertenencia dentro de la Clase 2. Por supuesto que una política educativa de esta magnitud debe acompañarse de políticas complementarias, tendientes a incrementar la productividad del país, pues ello contribuirá a lograr, simultáneamente, un aumento significativo del PIB per cápita. De esta manera, los impactos alcanzados pueden contribuir a que México llegue a alcanzar mejores niveles en su desarrollo económico.

Entre los posibles escenarios de este tipo de trabajo en el futuro se planteaba continuarlo al incluir, no sólo los valores actualizados de las variables, sino adicionando algunas otras, a saber: índices de bienestar, mediciones del nivel de pobreza y tasas de desempleo; como se ha podido manifestar en este trabajo, se trata de modelar matemáticamente el patrón de evolución que ha seguido la economía de México sin pretender con ello validar a algún modelo macroeconómico específico, sino buscando que los datos duros que resultan del funcionamiento real de la economía de México se expresen por sí mismos. Consideramos que este enfoque constructorista puede lograr al final llegar a conceptualizar un modelo

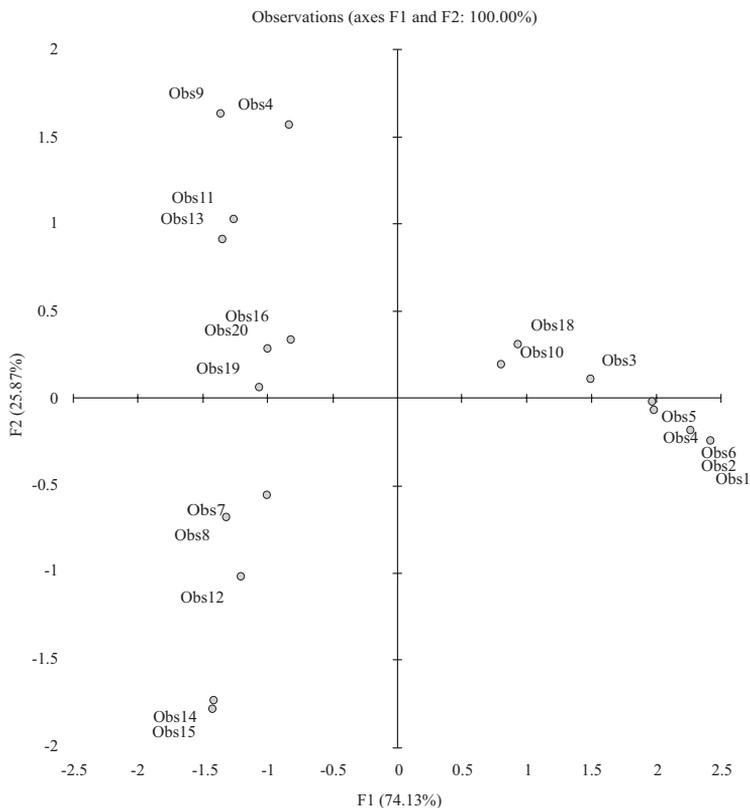
de desarrollo económico que, por ser inferido de procedimientos empíricos, tenga una mejor capacidad para explicar los problemas de naturaleza teórica de la que adolece la teoría matemática convencional. Sin embargo, el objetivo ya mencionado para continuar este trabajo en un futuro cercano se enfrenta al hecho irreparable del reciente fallecimiento de Angus Maddison, no obstante se reconoce su gran aportación al desarrollo de trabajos como el presente.

Se ha presentado la aplicación de un algoritmo de clasificación de datos OVS en el estudio del patrón de evolución de la economía de México durante casi la última mitad del siglo XX. En todo momento se ha buscado un nivel mínimo de matematización del modelo empleado, en el sentido planteado recientemente por algunos investigadores respecto al uso de modelos matemáticos sofisticados (Hudson, 2110) y con el objetivo de contribuir, así, a la búsqueda de modelos alternativos de estadística matemática. El procedimiento seguido consiste simplemente en extender el ya conocido algoritmo de clasificación de k -medias difusas al caso de datos OVS, consideramos que el objetivo se ha cumplido satisfactoriamente, al obtener un método matemático no convencional, dirigido a medir empíricamente las tendencias subyacentes en la trayectoria de evolución de la economía de México, respecto a su integración como país miembro de la OCDE.

Cuadro 18
Puntajes de los factores en al ACP para la matriz difusa U
del Cuadro 7

| <i>Factor Scores:</i> | | |
|-----------------------|-----------|-----------|
| <i>Observation</i> | <i>F1</i> | <i>F2</i> |
| Obs1 | 2.412 | -0.247 |
| Obs2 | 2.252 | -0.189 |
| Obs3 | 1.489 | 0.108 |
| Obs4 | -0.835 | 1.575 |
| Obs5 | 1.966 | -0.017 |
| Obs6 | 2.253 | -0.168 |
| Obs7 | 1.974 | -0.065 |
| Obs8 | -1.322 | -0.680 |
| Obs9 | -1.362 | 1.637 |
| Obs10 | 0.798 | 0.200 |
| Obs11 | -1.262 | 1.032 |
| Obs12 | -1.209 | -1.024 |
| Obs13 | -1.349 | 0.918 |
| Obs14 | -1.417 | -1.734 |
| Obs15 | -1.423 | -1.776 |
| Obs16 | -0.824 | 0.335 |
| Obs17 | -1.004 | -0.557 |
| Obs18 | 0.929 | 0.300 |
| Obs19 | -1.066 | 0.062 |
| Obs20 | -1.000 | 0.290 |

Gráfica 4
Gráfica de los dos componentes principales para los datos del Cuadro 7



Cuadro 19
Puntajes de los factores en al ACP para la matriz difusa U del Cuadro 11

Factor scores:

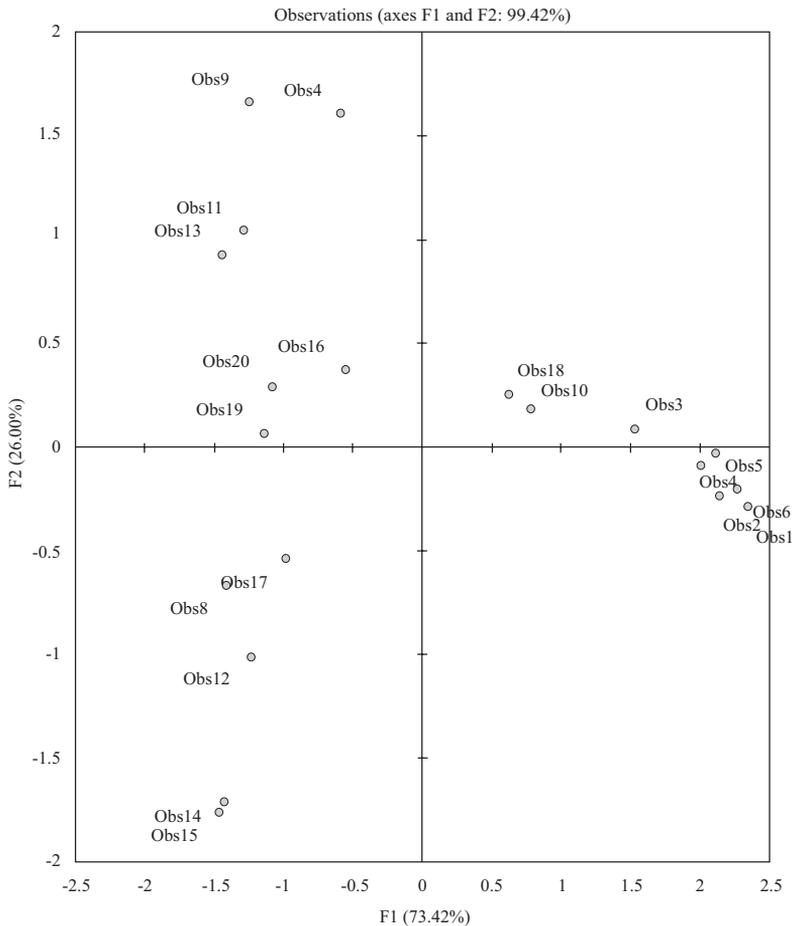
| Observation | F1 | F2 | F3 |
|-------------|--------|--------|--------|
| Obs1 | 2.352 | -0.287 | -0.049 |
| Obs2 | 2.136 | -0.232 | -0.115 |
| Obs3 | 1.541 | 0.091 | 0.055 |
| Obs4 | -0.588 | 1.609 | 0.196 |
| Obs5 | 2.110 | -0.030 | 0.164 |
| Obs6 | 2.266 | -0.199 | 0.027 |
| Obs7 | 2.006 | -0.089 | 0.042 |
| Obs8 | -1.406 | -0.668 | -0.064 |
| Obs9 | -1.247 | 1.665 | 0.047 |
| Obs10 | 0.785 | 0.187 | -0.022 |
| Obs11 | -1.282 | 1.045 | -0.074 |

Continúa...

Factor scores:

| Observation | F1 | F2 | F3 |
|-------------|--------|--------|--------|
| Obs12 | -1.232 | -1.007 | 0.020 |
| Obs13 | -1.434 | 0.927 | -0.141 |
| Obs14 | -1.423 | -1.711 | 0.072 |
| Obs15 | -1.461 | -1.756 | 0.040 |
| Obs16 | -0.549 | 0.374 | 0.287 |
| Obs17 | -0.986 | -0.540 | 0.045 |
| Obs18 | 0.624 | 0.255 | -0.349 |
| Obs19 | -1.129 | 0.071 | -0.075 |
| Obs20 | -1.080 | 0.295 | -0.105 |

Gráfica 5
Gráfica de los dos componentes principales para los datos del Cuadro 11



Referencias bibliográficas

- Bezdek, J. N. (1981). *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*, New York: Plenum Press.
- Boyd, S. and L. Vandenberghe (2004). *Convex Optimization* (http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf).
- Breiman, L.; J. Friedman; C. Stone and R. A. Olshen (1993). *Classification And Regression Trees*, USA: Second Edition, Wadsworth.
- Carroll, J. and P. Arabie (1983). "INDCLUS: An individual differences generalization of the ADCLUS model and MAPCLUS algorithm", *Psychometrika*, Vol. 48, pp. 15-169.
- Chiang, A. and K. Wainwright (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*, 4a. Edición, México: Mc Graw-Hill/Interamericana de Editores.
- Da Cunha, N. C. and E. Polak (1967). "Constrained minimization under vector-valued criteria in finite-dimensional space", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 19, pp. 103-124.
- FMI (2011). "Perspectivas de la economía mundial", *Estudios Económicos y Financieros*, capítulo 1, septiembre 2011.
- Giles, D. E. and R. Draeseke (2003). "Econometric modeling based on pattern recognition via the fuzzy-c means algorithm", *Computer-aided econometrics*, NY: Dekker.
- Hudson, M. (2010). "The use and abuse of mathematical economy", *Real-World Economics Review*, No. 55 (<http://nwer.wordpress.com/>).
- Jozsef, S.; P. Korosi and L. Matyas (1992). "A possible new approach of panel modeling", *Structural Change and Economics Dynamics*, No. 3, pp. 357-374.
- Kaufman, L. and P. J. Rousseeuw (1990). *Finding groups in data*, NY: Wiley.
- Lindström, T. (1998). "A fuzzy design of the willingness to invest in Sweden", *Journal of Economic Behavior and Organization*, No. 36, pp. 1-17.
- Maddison, A. (1997). *La Economía Mundial 1820-1992: Análisis y Estadísticas*, Centro de Desarrollo, Francia: OCDE.
- Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariantes*, México: McGraw-Hill Interamericana.
- Ripley, B. D. (1994). "Neural networks and related methods for classification", *Journal of the Royal Statistical Society B*, No. 56, pp. 409-456.
- Ross, T. J. (2004). *Fuzzy logic: with engineering applications*, Wiley, New York.
- Ruspini, E. H. (1969). "A new approach to clustering", *Inform. Control*, Vol. 15, pp. 22-32.
- Rust, J. and S. Golombok (1989). *Modern Psychometrics: The Science of Psychological Assessment*, New York: Routledge.
- Sengupta, K. (1999). "Choice rules with fuzzy preferences: Some characterizations", *Social Choice and Welfare*, No. 16, pp. 259-272.
- XLSTAT (2011) (<http://www.xlstat.com>).

Anexo 1

Un teorema de clasificación dinámica de datos OVS El problema de optimización de múltiples criterios

La clasificación de datos *OVS* tiene la desventaja de que cada posible criterio de clasificación de los O objetos no es invariante respecto a las S posibles situaciones, debido al cambio de las V variables consideradas en cada nueva situación. De manera que las clases óptimas encontradas respecto a un conjunto de datos *OVS* cambian para cada criterio definido en la situación S , y se concluye que no sería apropiado aceptar una clasificación óptima para una sola situación. Este problema se puede plantear de manera equivalente al encontrar una clasificación óptima de un conjunto de datos *OVS* que sea consistente con los criterios especificados, que los cumpla en la mayor medida posible y que resulte invariable respecto a las situaciones; es decir, se trata de resolver un problema de optimización de múltiples criterios (POMC). Es posible encontrar la solución de este problema generalizando el algoritmo de clasificación para datos *OV* conocido como algoritmo de c -medias difusas (c -MD), el cual fue desarrollado por Bezdek (1981) al estudiar el enfoque de clasificación propuesto por Ruspini (1969). Para lograr esta generalización se establece un teorema del cual se obtiene como corolario un algoritmo, que a su vez, también es una generalización del algoritmo c -MD, para resolver el POMC.

Por convención, este problema se representa como $(\Omega, J_1, \dots, J_S)$, donde el objetivo es obtener la solución $x^* \in \Omega$, para la cual se cumple que: $J_s(x^*) = \text{Mínimo} \{J_s(x) : x \in \Omega\}$, donde Ω es el conjunto de soluciones factibles con: $x \in X = (X_{ij}^{(s)})$, y x es el conjunto de datos o matriz de datos *OVS*, con $i = 1, \dots, O; j = 1, \dots, V; s = 1, 2, \dots, S$; y donde $J = (J_1, \dots, J_S) : \Omega \rightarrow R_s$, es una función de criterios múltiples (multi-criterio), es decir, un vector S -dimensional de las funciones criterio definidas sobre Ω . Los problemas de optimización han sido ampliamente estudiados en el campo de la Economía Matemática, donde se les considera en el contexto del análisis de equilibrio final de un sistema económico (Chiang and Wainwright, 2006), aunque no con los propósitos de clasificación de datos como se pretende en este trabajo. Es claro que, si $s = 1$, entonces el POMC se reduce a un problema de optimización de un solo criterio (POSC): $J = J_1(x)$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $J_s(x) > 0$, para toda $s = 1, 2, \dots, S$. Como $J \in R^S$, deja de ser único el concepto de mínimo; de tal manera que se caracteriza a la solución del POMC en (1) utilizando los conceptos de: solución dominante, solución dominada y solución eficiente (o de Pareto) y solución localmente eficiente (Boyd-Vandenbergh, 2004). Este problema

de optimización restringida, con varios criterios vectoriales se puede resolver transformándolo en un problema de optimización de un solo criterio mediante la suma ponderada de los J_1, \dots, J_S criterios, si cada criterio J_s define a una función convexa (Da Cunha y Polak, 1967). El algoritmo que se propone en este trabajo resulta como corolario del siguiente teorema de clasificación de datos OVS (CDOVS):

Teorema CDOVS

Sea un conjunto de datos OVS denotado como $X = (X_{ij}^{(s)})$ donde $i = 1, 2, \dots, O; j = 1, 2, \dots, V; s = 1, 2, \dots, S$; de manera que es posible clasificar a los O objetos en K clases difusas: C_1, C_2, \dots, C_K ; con $k = 1, 2, \dots, K$. Es claro que: $2 \leq K < O$. Sean $U = (\mu_{ki})$ y $v_k^{(s)}$ la matriz difusa de pertenencias y el centroide o valor representativo de la clase C_k , respectivamente. Sea (U^*, v^*) una solución eficiente (SE) del POMC $(\Omega, J^{(1)}, \dots, J^{(S)})$ es decir, la suma ponderada de los $J^{(s)}$:

$$J(U^*, v^*) = \sum_{s=1}^S \omega^s J^{(s)}(U, v^{(s)}) = \text{Mínimo}_{(U,v)} \{J : J(U, v)\} \quad (1)$$

Además, sean:

$$C_i = \left\{ k : \sum_s d^2(X_i^{(s)}, v_k^{(s)}) = \sum_s \sum_j (X_{ij}^{(s)} - v_{kj}^{(s)})^2 = 0 \right\},$$

$C_i^c = \{1, 2, \dots, K\} - C_i$, el complemento difuso de C_i

Por lo tanto, dados los valores de pertenencia μ_{iK} , se cumple que:

$$v_{kj}^{(s)} = \left[\frac{\sum_s \mu_{ki}^{(\alpha)} X_{ij}^{(s)}}{\sum_s (\mu_{ki})^\alpha} \right], \text{ donde } k=1, 2, \dots, K; j=1, 2, \dots, V; s=1, 2, \dots, S \quad (2)$$

$$\mu_{ki} = \begin{cases} \left[\frac{\sum_{q=1}^K \left(\frac{\sum_s \omega^{(s)} d^2(x_i^{(s)}, v_q^{(s)})}{\sum_s \omega^{(s)} d^2(x_i^{(s)}, v_q^{(s)})} \right)^{\frac{1}{(\alpha-s)}}}{\sum_{q=1}^K \left(\frac{\sum_s \omega^{(s)} d^2(x_i^{(s)}, v_q^{(s)})}{\sum_s \omega^{(s)} d^2(x_i^{(s)}, v_q^{(s)})} \right)^{\frac{1}{(\alpha-s)}}} \right]^{-1}, & \text{si } C_i = 0 \\ 0, & \text{si } C_i \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

En (1) y en (2), $v_{kj}^{(s)}$ y μ_{ki} son los valores de los centroides y de los valores de pertenencia de las K clases difusas para los datos OVS , respectivamente.

Demostración del Teorema

Se demuestra primero la ecuación (2) para los centroides, bajo la suposición de que la matriz difusa U es fija, con sus elementos (μ_{ki}) independientes del tiempo, entonces, partiendo de (1):

$$\begin{aligned} \text{Mínimo}_{\{v\}} J &= \text{Mínimo}_{\{v\}} \left\{ \sum_{s=1}^S \omega^{(s)} J^{(s)}(U, v_k^{(s)}) : v_k \in R^v, \omega^{(s)} > 0 \right\} \\ &= \text{Mínimo}_{\{v\}} \sum_{s=1}^S \omega^{(s)} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^O \mu_{ki}^\alpha \cdot \sum_{j=1}^V (X_{ij}^{(s)} - v_{kj}^{(s)})^2 : x_i, v_k \in R^v, \omega^{(s)} > 0 \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^S \omega^{(s)} \left\{ \text{Mínimo}_{\{v\}} G(x_i, v_k) \right\}, G(x_i, v_k) \equiv \sum_{i=1}^O (\mu_{ki})^\alpha \cdot \sum_{j=1}^V (X_{ij}^{(s)} - v_{kj}^{(s)})^2 \end{aligned}$$

De modo que, los puntos estacionarios de $J(U, v)$ corresponden a los respectivos puntos estacionarios de $G(x_i, v_k)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x_i, v_k)}{\partial v_k} = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^O (\mu_{ki})^\alpha \cdot \sum_{j=1}^V (x_{ij}^{(s)} - v_{kj}^{(s)}) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^V v_{kj}^{(s)} \sum_{i=1}^O (\mu_{ki})^\alpha = \sum_{j=1}^V \sum_{i=1}^O (\mu_{ki})^\alpha x_{ij}^{(s)} \\ &\Rightarrow v_{kj}^{(s)} = \left[\frac{\sum_s \mu_{ki}^{(\alpha)} x_{ij}^{(s)}}{\sum_s (\mu_{ki})^\alpha} \right], \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora demostramos (3), mantenemos fijo e independiente de i a cada vector de los centroides $v_k^{(s)}$, entonces, dada $U = (\mu_{ki}) \in M_{Kd}$:

$$\begin{aligned} \text{Mínimo}_{[U]} J(U, v) &= \text{Mínimo}_{[U]} \left\{ \sum_{s=1}^S \omega^{(s)} J^{(s)}(U, v_k^{(s)}) : \omega^{(s)} > 0, \sum_{k=1}^K \mu_{ki} = 1 \right\} = \\ &= \text{Mínimo}_{[U]} \left\{ \sum_{s=1}^S \omega^{(s)} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^O (\mu_{ki})^\alpha \sum_{j=1}^V \left(X_{ij}^{(s)} - v_{kj}^{(s)} \right)^2 : \omega^{(s)} > 0, \sum_{k=1}^K \mu_{ki} = 1 \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^O \text{Mínimo} \{ H(\mu_{ki}) \}, \text{ donde: } H(\mu_{ki}) \equiv \sum_{s=1}^S \omega^{(s)} \sum_{k=1}^K (\mu_{ki})^\alpha \sum_{j=1}^O \left(x_{ij}^{(s)} - v_{kj}^{(s)} \right)^2 \end{aligned}$$

Este resultado significa que:

$$\text{Mínimizar}_{[U]} J(U, v) \sim \text{Mínimizar} \{ H(\mu_{ki}) \}, \text{ Sa: } \sum_{k=1}^K \mu_{ki} = 1.$$

La solución de este programa no lineal se obtiene construyendo la función de Lagrange $L(\lambda, U)$ asociada a $H(\mu_{ik})$:

$$L(\lambda, U) = H(\mu_{ik}) - \lambda [(\sum_k \mu_{ki}) - 1], \text{ donde } \lambda \text{ es el multiplicador de Lagrange.}$$

Entonces, aplicando las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\lambda, U)}{\partial \lambda} &= 0 \Rightarrow \left(\sum_K \mu_{ki} \right) = 1, & (5) \\ \frac{\partial L(\lambda, U)}{\partial U} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mu_{ik}} H(\mu_{ki}) = \lambda \frac{\partial}{\partial \mu_{ik}} \left[\left(\sum_k \mu_{ki} \right) - 1 \right] \\ &\Rightarrow \sum_k (\mu_{ki})^{\alpha-1} \sum_{s=1}^S \omega^{(s)} \sum_{j=1}^O \left(x_{ij}^{(s)} - v_{kj}^{(s)} \right)^2 = \sum_k \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right) \\ &\Rightarrow \sum_k (\mu_{ki})^{\alpha-1} \sum_{s=1}^S \omega^{(s)} \sum_{j=1}^O \left(x_{ij}^{(s)} - v_{kj}^{(s)} \right)^2 = \sum_k \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right) \\ &\Rightarrow (\mu_{ki})^{\alpha-1} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)}{\sum_{s=1}^S \omega^{(s)} \sum_{j=1}^O \left(x_{ij}^{(s)} - v_{kj}^{(s)} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu_{ki} = \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\partial} \right)}{\sum_{s=1}^S \omega^{(s)} \sum_{j=1}^O \left(x_{ij}^{(s)} - v_{kj}^{(s)} \right)_2} \right]^{\frac{1}{(\alpha-1)}} \quad (6)$$

Aplicando la restricción (6) en (5), esta última ecuación se convierte en (3).

Análisis del Teorema CDOVS

En la demostración del Teorema 2, incluida en un Apéndice, se pueden constatar los siguientes hechos:

- 1) La similitud con el Teorema de clasificación de c -medias difusas (Bezdek, 1981). En realidad las ecuaciones correspondientes para los centroides son iguales, excepto en la dependencia respecto a cada situación en el Teorema, pues ambos resultados se obtienen mediante procedimientos de optimización sin restricciones aplicados a las respectivas funciones criterio.
- 2) El objetivo de obtener clases comunes y válidas para todas las situaciones, permite lograr que también los valores de pertenencia, correspondientes a los centroides asociados a la SE alcanzada, sean independientes de las situaciones.
- 3) En la expresión para μ_{ki} notamos que, si $\mu_{ki} = 0$, existe una clase k tal que $d(X_i^{(s)}, (v_k^{(s)})) = 0$. Esto significa que el objeto i que cumple esta condición tiene pertenencia cero en cualquier otra clase; a este objeto se le llama singularidad.
- 4) En (1), la función objetivo no lineal $J(U, v)$, que define al criterio de clasificación, es una función continua ponderada de las variables múltiples (U, v) , pues suponemos que cada una de las funciones criterio $J^{(s)}(U, v^{(s)})$ es convexa, para asegurar que $v_{kj}^{(s)}$ y μ_{ki} sean una SE.
- 5) Aunque el Teorema requiere sólo que el parámetro α de difusividad cumpla con $\alpha \in (0, \infty)$, en el desarrollo del algoritmo de clasificación difusa usaremos $\alpha = 2$, ya empleado exitosamente en trabajos previos para datos OV (Ross, 2004).
- 6) Respecto a los factores de ponderación ω , cuando se trate de estudios pioneros donde no se disponga de información para cuantificar la importancia de las diversas situaciones por las que ocurren los datos OV , se sugiere emplear el criterio de Laplace, asignando pesos equitativos a las S situaciones.

Anexo 2

Un algoritmo difuso de clasificación para datos *OV*S

Este procedimiento, al igual que el teorema propuesto, resulta una generalización del ya conocido algoritmo de *c*-medias difusas (CMD).

Paso 1. Se establece K , el número apropiado de clases, el valor del nivel α y el valor del criterio de convergencia $\varepsilon_K > 0$. Se aplica entonces el algoritmo CMD al conjunto de datos de interés *OV*S, correspondientes a $s = 1$, utilizando una matriz U inicial arbitraria, ya sea convencional o difusa, hasta que se cumpla el criterio de convergencia ε_K .

Paso 2. Se repite el Paso 1, utilizando como solución inicial los elementos $U = \mu_{ki}$ obtenidos en ese paso, en el conjunto de datos *OV*S correspondientes a $s = 2$, hasta que se alcance, nuevamente, el criterio ε_K .

Paso 3. Se repite el Paso 2 hasta que éste se haya realizado para todas las S situaciones.

Paso 4. Se establece $\{\omega_1, \dots, \omega_S\}$, el conjunto de parámetros de ponderación, para aplicar el Teorema CDOVS. Se elige la norma inducida por un producto interno como la distancia euclidiana: $d_{ik} = (d_i^{(k)}, v_k^{(k)})$ asociada a las S soluciones de convergencia obtenidas con los valores de los parámetros (ε_K, α) ya utilizados, para encontrar los valores μ_{ki} del objeto i a la clase difusa $k = 1, 2, \dots, K$, de acuerdo al Teorema CDOVS.

Paso 5. Una vez obtenidos los valores de pertenencia difusa (μ_{ki}) , entonces el objeto i es asignado a la clase k si $\mu_{ki} > \mu_{pi}$ para $k \neq p$ con $1 \leq k, p \leq K$.

De esta manera, al determinar los correspondientes centroides de las clases obtenidas, se obtiene una representación de las K clases en R^v , de acuerdo al teorema CDOVS. En el Paso 1 se recomienda que, al seleccionar el valor K , el número de clases, se justifique su valor como resultado de una investigación conducida por expertos en el tema; de esta manera se evita una primera discusión sobre la pertinencia del valor K propuesto en estudios similares anteriores o, incluso, futuros. De otra forma, se puede llegar a situaciones como plantear escenarios del tipo “qué pasa si”; o bien, a tener que realizar pruebas de ensayo y error, hasta llegar a un conjunto de valores aceptables para K .