

Rompimientos en la caminata aleatoria con intercepto: la prueba Dickey-Fuller de ajuste recursivo

(Recibido: mayo/09–aprobado: septiembre/09)

*Eddy Lizarazu Alanez**

*Miguel A. Martínez Damián***

*José A. Villaseñor Alva***

Resumen

Si la componente determinista de las ecuaciones de Bhargava (1986) es estimada mediante el ajuste recursivo de Shin y So (2001), entonces la prueba Dickey-Fuller de Shin-So (DFSS) tiene una mejor potencia estadística. Si además el procedimiento se somete al filtro de Taylor (2002), entonces la DFSS es robusta ante los rompimientos de la caminata aleatoria ‘con intercepto’. Por ende, es conveniente usar dicho procedimiento en el análisis econométrico sobre todo cuando se conoce la existencia de un rompimiento inicial del proceso estocástico bajo la hipótesis nula, tal como en el caso de un ataque especulativo a la moneda nacional.

Palabras clave: ajuste de tendencia recursivo, estadístico Dickey-Fuller, filtro de Taylor.

Clasificación JEL: C12, C15, C32.

* Profesor del Departamento de Economía de la UAM-Iztapalapa (eddy.lizarazu@yahoo.com).

** Profesor del Instituto de Socioeconomía, Estadística e Informática (ISEI), Campus Montecillo, Colegio de Postgraduados (angel01@colpos.mx, jvillasr@colpos.mx). Se agradecen las sugerencias de dos dictaminadores anónimos y del apoyo económico brindado por el CONACYT para la elaboración de este artículo.

Introducción

Una característica común de muchas series económicas es que exhiben una tendencia de la clase de un paseo aleatorio con intercepto. Nelson y Plosser (1982) proporcionan evidencia acerca de que muchas variables agregadas tienen raíces unitarias. Si la mayoría de las series macroeconómicas son realizaciones de procesos raíz unitaria, entonces de acuerdo con las ecuaciones de Bhargava (1986) se pudiera presentar la posibilidad de un rechazo espurio de la hipótesis nula cuando el proceso verdadero es un $I(1)$ sujeto a rompimientos del intercepto.¹ Si los quiebres son importantes, Kim, Leybourne y Newbold (2002, 2004) y Leybourne, Mills y Newbold (1998) muestran que el estadístico Dickey-Fuller (DF) estándar experimenta una distorsión en su tamaño de prueba cuando se emplea el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) o la técnica de estimación simétrica ponderada (ESP).

Por otro lado, el ajuste recursivo de Shin y So en la prueba DF para una caminata aleatoria ‘sin intercepto’ no experimenta una ‘distorsión severa’ en el tamaño nominal de la prueba cuando se producen rompimientos iniciales en la serie. Cook (2002, 2003) y Leybourne y Newbold (2000) proporcionan evidencia acerca del DFSS cuando ocurre un cambio estructural en el nivel (pero no en la pendiente) y la varianza del término de error. Por ende, el objetivo de este artículo es mostrar cómo se debe implementar la prueba DFSS cuando el paseo aleatorio tiene un ‘intercepto’ diferente de cero. La aplicación de esta prueba experimenta el escollo de la no-invarianza del estadístico al parámetro de estorbo (el intercepto de la caminata aleatoria). Si el intercepto es relativamente ‘grande’ se podrían exteriorizar dificultades en la potencia estadística más baja, por lo que la prueba DF debe ser sometida al filtro de Taylor (2002).

Con base en simulaciones de Monte Carlo, en este artículo se muestra que el DFSS sometido al filtro de Taylor está libre del problema causado por el rechazo espurio de la hipótesis nula cuando se experimentan cambios en la ‘pendiente’ de la serie. En este sentido, el presente artículo contribuye al estado de conocimientos al extender los resultados de Cook para el caso de una caminata aleatoria ‘con intercepto’. En efecto, el comportamiento de la prueba DFSS en el caso de una caminata aleatoria sujeta a ‘quiebres’ del parámetro del proceso $I(1)$ no ha sido estudiado en la literatura econométrica, por lo que esta investigación es un avance en esa dirección.

¹ En la literatura econométrica tal problemática es conocida como el “fenómeno inverso de Perron”. A este respecto, consúltense a Leybourne, Mills y Newbold (1998) y Perron (1989).

Dada la caracterización del estadístico DFSS, aun si el proceso experimentara algún cambio estructural es improbable rechazar incorrectamente la hipótesis nula. Lo anterior se ilustra con las pruebas de los estadísticos DF y DFSS para la teoría de la paridad de poder de compra (PPC) en la cual se hace hincapié que a largo plazo el tipo de cambio real tiende a una constante finita (la media). La idea proviene de asumir que el comportamiento estocástico del tipo de cambio real es un proceso estacionario alrededor de una tendencia lineal. En tal perspectiva, al utilizar la prueba DF para los datos de México después del ataque especulativo a la moneda nacional (diciembre 1994 hasta marzo de 2003) se respalda incorrectamente la teoría de la PPC en el largo plazo. La disponibilidad de más datos y el DFSS hacen ver el equívoco de tal afirmación a pesar del rompimiento inicial en la caminata aleatoria.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección se expone el enfoque de Shin y So para la estimación de la componente determinista de las ecuaciones de Bhargava (1986), la cual anida una caminata aleatoria (hipótesis nula) y a un proceso estacionario alrededor de la tendencia lineal (hipótesis alternativa). La construcción del DF en el ámbito del ajuste recursivo tiene como desventaja estar en función del parámetro del paseo aleatorio, por lo cual es necesario filtrar los datos para evitar problemas en el tamaño y la potencia de la prueba. En la segunda, con base en un estudio de simulación Monte Carlo, se exhibe el comportamiento empírico de los estadísticos DF y DFSS. En la tercera, siguiendo el modelo de Kim, Leybourne y Newbold (2004), se muestra la conducta de los estadísticos en el caso de rompimientos bajo la hipótesis nula. La evidencia en favor del estadístico DFSS se manifiesta en que hay ninguna distorsión en el tamaño nominal de la prueba. Dada la caracterización del DFSS, en la cuarta sección se utilizan los estadísticos mencionados para averiguar si es sostenible la PPC en el caso de la economía mexicana después del ataque especulativo de diciembre de 1994. Los resultados están del lado de la divergencia del tipo de cambio real. Por último, se vierten algunas conclusiones.

1. La prueba DF y el ajuste recursivo de la tendencia lineal

Siguiendo a Bhargava (1986) el marco adecuado para estudiar la hipótesis de raíz unitaria es la estructura de ecuaciones que anida a un proceso caminata aleatoria $I(1)$ y a un proceso estacionario $I(0)$. Por ende, consideremos el modelo estadístico compuesto de las ecuaciones (1) y (2) en el cual el recorrido del tiempo es $t = 1, \dots, T$ para cada una de sus variables, donde T es el número de observaciones y ε_t es un ruido blanco tal que $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$.

$$y_t = \alpha + \beta t + v_t \quad (1)$$

$$v_t = \phi v_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

La primera ecuación incluye una constante α y una tendencia lineal, ya que β es el coeficiente de la unidad de tiempo t . Por su parte, la segunda ecuación describe al término de error siendo ϕ el parámetro del proceso autorregresivo.

Al combinar (1) y (2) es posible concebir otro proceso autorregresivo en el cual las variables están transformadas por una tendencia lineal. Esta última está supe-
ditada al período de tiempo anterior por lo que se tiene la siguiente formulación:

$$\hat{y}_t = \phi \hat{y}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &\equiv y_t - \alpha - \beta t; \text{ y} \\ \hat{y}_{t-1} &\equiv y_{t-1} - \alpha - \beta (t-1). \end{aligned}$$

Si la hipótesis nula es $\phi = 1$, entonces (3) se convierte en un proceso con paseo aleatorio $I(1)$ con intercepto, debido a que al eliminarse algunos términos se tiene la siguiente especificación:

$$y_t = \beta + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4)$$

Donde:

β es el intercepto.

Si $\beta > 0$ el proceso estocástico exhibirá una tendencia ascendente, en caso contrario, el proceso estocástico exteriorizará una tendencia descendente.

Si la hipótesis alternativa es $|\phi| < 1$, entonces (3) es un proceso estacionario $I(0)$ alrededor de la tendencia lineal. La exclusión de $|\phi| > 1$ se debe a que el proceso estocástico sería explosivo. Empero interesa un subconjunto del espacio paramétrico de la hipótesis alternativa en el cual el rango del parámetro es $0 < \phi < 1$. Por otro lado, $-1 < \phi < 0$ da lugar a un proceso oscilatorio. Muchos datos financieros y económicos muestran una tendencia ascendente o descendente fluctuante, pero no oscilante recurrente de una amplitud más o menos fija. Por ende, nos abstraemos de tal situación para enfocarnos a la clase de datos que son de interés: $0 < \phi < 1$.

Para contrastar la hipótesis de raíz unitaria es necesario estimar α y β en (1) y utilizar estos parámetros para luego obtener ϕ en (2). De acuerdo con Dickey

y Fuller (1979, 1981) el estadístico para probar la hipótesis nula $H_0: \phi = 1$ es $DF = T(\hat{\phi}-1)$. En tal caso, T es el tamaño de la muestra y el estimador autorregresivo $\hat{\phi}$ es el de MCO, el cual se calcula de la siguiente manera:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^T [y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} t] [y_{t-1} - \hat{\alpha} - \hat{\beta} (t-1)]}{\sum_{t=2}^T [y_{t-1} - \hat{\alpha} - \hat{\beta} (t-1)]^2} \quad (5)$$

Donde:

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son los estimadores MCO de la componente determinista en los que se utilizan las T observaciones de la muestra.

Siguiendo a Shin y So (2001, 2002) y So y Shin (1999), la prueba DF para la raíz unitaria tiene una mejor potencia si el componente determinista de (2) es estimado de forma recursiva por MCO. La idea central de estos autores consiste en la reducción del sesgo de la ecuación autorregresiva estimada implicada por $\hat{y}_t = \phi - \hat{y}_{t-1} + \varepsilon_t$. La técnica de estimación recursiva consiste en utilizar regresiones secuenciales para diferentes muestras de dimensión $d \in [2, T]$. De esta manera, al estimar (1) se utilizan las observaciones del total de T datos, empezando con las primeras dos observaciones hasta d datos, y luego se repite el mismo procedimiento hasta T .

En todo caso, el valor de y_t satisface (6), siendo $\hat{\alpha}'_{t-1}$ y $\hat{\beta}'_{t-1}$ los estimadores de los parámetros α y β y $\hat{v}_k$ el error de estimación:

$$y_t = \hat{\alpha}'_{t-1} + \hat{\beta}'_{t-1} k + \hat{v}_k \quad (6)$$

En (7) los estimadores se construyeron con base en $t+1$ observaciones, por lo cual se puede reescribir el lado derecho de la ecuación a conveniencia de manera que aparezca $(t/2) \hat{\beta}'_{t-1}$, tal como a continuación se ilustra.

$$y_t = \left(\hat{\alpha}'_{t-1} + \frac{t}{2} \hat{\beta}'_{t-1} \right) + \hat{\beta}'_{t-1} \left(k - \frac{t}{2} \right) + \hat{v}_k \quad (7)$$

El término $(t/2) \hat{\beta}'_{t-1}$ se puede cancelar debido a los signos opuestos, por lo que necesariamente (6) y (7) son equivalentes.

Dado que sólo se utilizaron $t + 1$ observaciones para calcular $\hat{\alpha}'_{t-1}$ y $\hat{\beta}'_{t-1}$, el recorrido del índice k es $1, \dots, t - 1$. Al minimizar la suma de los residuos al cuadrado $\sum_{k=1}^{t-1} \hat{v}_k^2$ entonces se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\hat{\alpha}'_{t-1} + \frac{t}{2} \hat{\beta}'_{t-1} = \frac{1}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} y_k \quad (8)$$

$$\left(\hat{\alpha}'_{t-1} + \frac{t}{2} \hat{\beta}'_{t-1} \right) \sum_{k=1}^{t-1} \left(k - \frac{t}{2} \right) + \hat{\beta}'_{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} \left(k - \frac{t}{2} \right)^2 = \sum_{k=1}^{t-1} \left(k - \frac{t}{2} \right) y_k \quad (9)$$

Antes de continuar con la manipulación algebraica, de algunos teoremas conocidos sobre sumatorias, obsérvese que se cumplen las siguientes propiedades:

$$\sum_{k=1}^{t-1} \left(k - \frac{t}{2} \right) = \sum_{k=1}^{t-1} k - \sum_{k=1}^{t-1} \frac{t}{2} = 0 \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^{t-1} \left(k - \frac{t}{2} \right)^2 = \sum_{k=1}^{t-1} k^2 - t \sum_{k=1}^{t-1} k + \sum_{k=1}^{t-1} \left(\frac{t}{2} \right)^2 = \frac{t(t-1)(t-2)}{12} \quad (11)$$

Dada la ecuación (10), el primer término de (9) desaparece, por ende, si se resuelve para $\hat{\beta}'$, se arriba al estimador buscado.

$$\hat{\beta}'_{t-1} = \frac{12}{t(t-1)(t-2)} \sum_{k=1}^{t-1} \left(k - \frac{t}{2} \right) y_k \quad (12)$$

Por otro lado, la propuesta de Shin y So para la reducción del sesgo en la ecuación autorregresiva estimada implica transformar los datos originales mediante el ajuste recursivo de la tendencia lineal que corresponde al periodo $t - 1$. De esta manera, la transformación de los datos procede con las operaciones asociadas al ajuste de la tendencia lineal para los periodos t y $t - 1$ pero con los estimadores $\hat{\alpha}'_{t-1}$ y $\hat{\beta}'_{t-1}$ para ambos periodos.

$$\tilde{y}_t = y_t - \hat{\alpha}'_{t-1} - \hat{\beta}'_{t-1} t \quad (13)$$

$$\tilde{y}_{t-1} = y_{t-1} - \hat{\alpha}'_{t-1} - \hat{\beta}'_{t-1} (t-1) \quad (14)$$

De manera similar a (6) y (7), las ecuaciones anteriores se pueden reescribir en términos de las siguientes formulaciones:

$$\tilde{y}_t = y_t - \left(\hat{\alpha}'_{t-1} + \frac{t}{2} \hat{\beta}'_{t-1} \right) - \hat{\beta}'_{t-1} t \left(\frac{t-2}{2} \right) \quad (15)$$

$$\tilde{y}_{t-1} = y_{t-1} - \left(\hat{\alpha}'_{t-1} + \frac{t}{2} \hat{\beta}'_{t-1} \right) - \hat{\beta}'_{t-1} t \left(\frac{t-2}{2} \right) \quad (16)$$

Entonces, al tomar en cuenta (8) y (12) en las ecuaciones (15) y (16) se llega a las siguientes expresiones:

$$\tilde{y}_t = y_t + \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} y_k - \frac{6}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} k y_k \quad (17)$$

$$\tilde{y}_{t-1} = y_{t-1} + \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} y_k - \frac{6}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} k y_k \quad (18)$$

Si se asume $y_0 = 0$ como condición inicial del proceso estocástico, entonces las transformaciones anteriores implican:

$$\tilde{y}_t = S_t + \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{6}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} k S_k + \beta \quad (19)$$

$$\tilde{y}_{t-1} = S_{t-1} + \frac{2}{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} S_k - \frac{6}{t(t-1)} \sum_{k=1}^{t-1} k S_k \quad (20)$$

Donde:

$$\begin{aligned} S_t &\equiv \sum_{i=1}^t \varepsilon_i; \\ S_{t-1} &\equiv \sum_{i=1}^{t-1} \varepsilon_i; \text{ y} \\ S_k &\equiv \sum_{i=1}^k \varepsilon_i. \end{aligned}$$

En las últimas dos ecuaciones obsérvese que la transformación $\tilde{y}_{t-1}$ no está en función de β , pero no ocurre lo mismo con $\tilde{y}_t$ ya que depende de la presencia dicho parámetro. Por consiguiente, el procedimiento de extracción de la tendencia lineal involucrado en (13) no es apropiada para la aplicación de la prueba DF cuando el intercepto es diferente de cero. Por tal motivo, es necesario seguir la recomendación de Taylor (2002), la cual consiste en filtrar y_t en términos de la tendencia lineal estimada $\hat{\beta}'_t$ del periodo t en lugar de la que corresponde a $t+1$.²

A continuación, se muestra que la transformación de Taylor permite al estadístico DFSS ser independiente del parámetro. A este respecto, suponga que el índice k tiene como recorrido $1, \dots, t$ de manera que en el instante k la ecuación estimada de (7) es:

$$y_k = \left(\hat{\alpha}'_t + \frac{t+1}{2} \hat{\beta}'_t \right) + \hat{\beta}'_t \left(k - \frac{t+1}{2} \right) + \hat{v}_k \quad (21)$$

Donde:

$\hat{\alpha}'_t$ y $\hat{\beta}'_t$ son los estimadores de α y β utilizando las primeras t observaciones de la muestra.

Antes de continuar, obsérvese que el operador sumatoria aplicado a $k - ((t+1)/2)$ con recorrido $k = 1, \dots, t$ satisface la siguiente ecuación:

$$\sum_{k=1}^t \left(k - \frac{t+1}{2} \right) = \sum_{k=1}^t k - \sum_{k=1}^t \frac{t+1}{2} = 0 \quad (22)$$

Al minimizar la suma de los residuos al cuadrado $\sum_{k=1}^t \hat{v}_k^2$, las condiciones de primer orden implican las siguientes ecuaciones:

$$\hat{\alpha}'_t + \frac{t+1}{2} \hat{\beta}'_t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t y_k \quad (23)$$

² Por supuesto, será también necesario tomar en cuenta al estimador $\hat{\alpha}'_t$ con los datos hasta el periodo t , tal como en el caso de $\hat{\beta}'_t$.

$$\hat{\beta}'_t \sum_{k=1}^t \left(k - \frac{t+1}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^t \left(k - \frac{t+1}{2}\right) y_k \quad (24)$$

Evidentemente, el estimador de MCO del parámetro de tendencia lineal es:

$$\hat{\beta}'_t = \frac{\sum_{k=1}^t \left(k - \frac{t+1}{2}\right) y_k}{\sum_{k=1}^t \left(k - \frac{t+1}{2}\right)^2} \quad (25)$$

Ahora bien, al tomar en cuenta (1) y considerando una versión de la misma que incluya a $k - ((t+1)/2)$ se tiene:

$$y_k = \left(\alpha + \frac{t+1}{2} \beta\right) + \beta \left(k - \frac{t+1}{2}\right) + v_k \quad (26)$$

En la ecuación anterior, al aplicar el operador sumatoria y después de algunas operaciones, contemplando (22) se llega a:

$$\sum_{k=1}^t y_k = t \left(\alpha + \frac{t+1}{2} \beta\right) + \sum_{k=1}^t v_k \quad (27)$$

Por ende, vía (27) la ecuación (23) se convierte en:

$$\hat{\alpha}'_t + \frac{t+1}{2} \hat{\beta}'_t = \left(\alpha + \frac{t+1}{2} \beta\right) + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t v_k \quad (28)$$

De manera similar, el numerador por (25), (26) es igual a:

$$\sum_{k=1}^t \left(k - \frac{t+1}{2}\right) y_k = \beta \sum_{k=1}^t \left(k - \frac{t+1}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^t \left(k - \frac{t+1}{2}\right) v_k \quad (29)$$

Por lo tanto, el estimador $\hat{\beta}'_t$ expresado en términos de β y de v_t es igual a:

$$\hat{\beta}' = \beta + \frac{\sum_{k=1}^t \left(k - \frac{t+1}{2}\right) v_k}{\sum_{k=1}^t \left(k - \frac{t+1}{2}\right)^2} \quad (30)$$

De acuerdo con Taylor (2002), la transformación apropiada en la prueba DF se obtiene de la siguiente operación:

$$\tilde{y}_t = y_t - \left(\hat{\alpha}'_t + \frac{t+1}{2} \hat{\beta}'_t\right) - \hat{\beta}'_t \left(\frac{t-1}{2}\right) \quad (31)$$

Al incorporar (28) y (30) en (31) se obtiene:

$$\tilde{y}_t = y_t + \frac{2}{t} \sum_{k=1}^t y_k - \frac{6}{t(t+1)} \sum_{k=1}^t k y_k \quad (32)$$

Por último, suponiendo de nuevo que la condición inicial del proceso estocástico es $y_0 = 0$, y si además (32) se itera hacia atrás, se llega a:

$$\tilde{y}_t = S_t + \frac{2}{t} \sum_{k=1}^t S_k - \frac{6}{t(t+1)} \sum_{k=1}^t k S_k \quad (33)$$

Donde:

$$S_t \equiv \sum_{i=1}^t \varepsilon_i; \text{ y}$$

$$S_k \equiv \sum_{i=1}^k \varepsilon_i.$$

De esta manera, la operación $\tilde{y}_t = y_t - \hat{\alpha}'_t - \hat{\beta}'_t t$ (véase (32)) es una transformación adecuada ya que no depende del parámetro β , sino sólo de las sumas de variables aleatorias ruido blanco.

Siguiendo a Shin y So (2001), el estadístico de mayor potencia es el DFSS $\equiv T(\hat{\phi}' - 1)$, donde $\hat{\phi}'$ se calcula de la siguiente manera:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^T [y_t - \hat{\alpha}'_t - \hat{\beta}'_t t] [y_{t-1} - \hat{\alpha}'_{t-1} - \hat{\beta}'_{t-1} (t-1)]}{\sum_{t=2}^T [y_{t-1} - \hat{\alpha}'_{t-1} - \hat{\beta}'_{t-1} (t-1)]^2} \quad (34)$$

2. El tamaño y la potencia de las pruebas DF y DFSS

Las fórmulas algebraicas de las distribuciones teóricas asintóticas de los estadísticos DF y DFSS son conocidas, empero es necesario tener una imagen (numérica) sobre el comportamiento empírico de los estadísticos con relación al tamaño y a la potencia de la prueba. El tamaño de la prueba es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera. Por su parte, la potencia concierne a la capacidad del estadístico para reconocer la clase de datos asociada con el proceso de datos bajo la hipótesis alternativa. En otras palabras, la potencia de la prueba es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa. En los cuadros 1 y 2 se reportan realizaciones para diferentes tamaños de muestra T del proceso generador de datos bajo la hipótesis nula. Los tamaños de las muestras fluctúan de 50 a 300 observaciones. Las simulaciones de Monte Carlo constan de 10,000 replicas calculando los cuantiles (percentiles) correspondientes a la distribución de cada uno de los estadísticos de prueba.

Los cuantiles son los valores de la variable que al ser ordenados de menor a mayor dividen a la distribución de probabilidad empírica en partes iguales, de tal manera que cada una contiene el mismo número de frecuencia. De esta manera, representan a los valores de la variable que están por debajo de un determinado porcentaje, desde 1 hasta 100% (el total de los datos es dividido en 100 partes iguales). Hay tres cuantiles importantes: cuartiles, deciles y percentiles. En los cuadros 1, 2 y 3 se reportan sólo algunos valores que corresponden a los percentiles.

Cuadro 1
Valores críticos para la prueba DF

T	0.010	0.025	0.050	0.100	0.90	0.95	0.975	0.990
25	-23.06	-20.34	-18.11	-15.75	-4.18	-3.23	-2.54	-1.77
50	-26.52	-22.88	-19.91	-17.16	-4.08	3.04	-2.14	-1.27
100	-27.63	-23.92	-20.68	-17.62	-3.83	-2.79	-1.91	-1.06
200	-28.15	-24.29	-21.18	-17.93	-3.90	-2.81	-1.93	-1.06
300	-28.18	-24.35	-20.95	-17.87	-3.78	-2.69	-1.89	-1.08

Nota: 10,000 simulaciones Monte Carlo con $\beta = 0$ de la ecuación (3) para la prueba DF $\equiv T(\hat{\phi} - 1)$.

Cuadro 2
Valores críticos para la prueba DFSS

T	0.010	0.025	0.050	0.100	0.90	0.95	0.975	0.990
25	-20.35	-17.65	-15.36	-12.77	-1.60	-0.66	-0.20	1.09
50	-23.74	-20.02	-17.21	-14.48	-2.11	-1.18	-0.38	0.59
100	-25.22	-21.28	-18.23	-15.15	-2.41	-1.51	-0.77	0.22
200	-25.71	-22.09	-19.05	-15.79	-2.71	-1.14	-0.95	-0.13
300	-25.72	-22.29	-19.11	-16.00	-2.75	-1.78	-1.08	-0.25

Nota: 10,000 simulaciones Monte Carlo con $\beta = 0$ de la ecuación (3) para la prueba DFSS $\equiv T(\hat{\phi}^* - 1)$.

Cuadro 3
Tamaño y potencia de las pruebas de raíz unitaria

ϕ	T = 25		T = 50		T = 100		T = 200		T = 300	
	DF	DFSS	DF	DFSS	DF	DFSS	DF	DFSS	DF	DFSS
1.00	0.0488	0.0498	0.0467	0.447	0.0479	0.0464	0.0527	0.0540	0.0502	0.0499
0.95	0.0535	0.0523	0.0623	0.0607	0.0999	0.1032	0.2380	0.2666	0.4884	0.5310
0.90	0.0630	0.0645	0.0981	0.1000	0.2397	0.2633	0.7250	0.7721	0.9820	0.9891
0.85	0.0779	0.0827	0.1526	0.1622	0.4770	0.5248	0.9784	0.9861	0.9999	1.0000
0.80	0.0967	0.0984	0.2350	0.2530	0.7454	0.7811	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000
0.75	0.1245	0.1317	0.3489	0.3772	0.9182	0.9374	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.70	0.1519	0.1664	0.4907	0.5266	0.9813	0.9876	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Nota: 10,000 simulaciones Monte Carlo con $\alpha = \beta = 0$ para las pruebas DF $\equiv T(\hat{\phi} - 1)$ y DFSS $\equiv T(\hat{\phi}^* - 1)$.

Los valores críticos de los cuadros 1 y 2 se utilizan para cuantificar el tamaño y la potencia de cada prueba estadística. Con este propósito, se elige arbitrariamente el nivel de significancia nominal a 5%. El Cuadro 3 contiene los resultados de la simulación de Monte Carlo para los diferentes tamaños de muestra. Las realizaciones de datos corresponden a los procesos de datos tanto bajo la hipótesis nula como la hipótesis. Los diferentes valores de ϕ se asocian con las diferentes clases de procesos estocásticos que se evalúan. Por ejemplo, en el caso de $\phi = 1$ (hipótesis nula) se tiene el tamaño de la prueba, el cual se espera sea igual a su valor nominal. Por su parte, a medida que ϕ se aleje de la unidad (hipótesis alternativa) se puede cuantificar la potencia de la prueba estadística, por lo que cuánto más grande sea la frecuencia de rechazo de la hipótesis nula, mayor será la potencia del estadístico involucrado.

Por lo tanto, de la inspección del Cuadro 3 se extraen las siguientes conclusiones para ambos estadísticos de prueba:

- a) Sin que interese el tamaño de la muestra, se constata la preservación del tamaño nominal de la prueba de 5% para cualquiera de los dos estadísticos de prueba. La frecuencia de rechazo de H_0 fluctúa alrededor de 5%.
- b) La prueba DFSS tiene ligeramente una mejor potencia en relación con la prueba DF para el rango $0.70 \leq \phi < 1$. Es decir, la tasa de aceptación de H_1 es mayor en el caso de DFSS para prácticamente cualquier tamaño de muestra.

La excepción al segundo señalamiento se presenta en $T = 25$ y $T = 50$ con $\phi = 0.95$, ya que la caracterización anterior se revierte. En otras palabras, para estos casos aislados la potencia del DF es mejor.

Si bien el comportamiento del estadístico DFSS es promisorio, es necesario evaluar su desempeño en situaciones donde se presentan cambios estructurales en el ‘parámetro de estorbo’. En tal perspectiva, a pesar de que el análisis de robustez de los estadísticos aplica a la hipótesis nula y alternativa, preferimos concentrarnos en el primer caso. A este respecto, nos abstraeremos del parámetro α debido a que el proceso generador de datos bajo la hipótesis nula no la contempla (véase (4)). Por otra parte, ya se ha constatado que el estadístico DFSS es invariante al parámetro β bajo la transformación recomendada por Taylor, por lo cual dicho estadístico se espera que sea robusto ante rompimientos bajo la hipótesis nula de la tendencia lineal.

3. Rompimiento bajo la hipótesis nula de la tendencia lineal

Para estudiar el comportamiento de los estadísticos DF y DFSS cuando existen rompimientos en el parámetro de tendencia lineal en el proceso generador de datos bajo la hipótesis nula, es pertinente considerar el modelo de Kim, Leybourne y Newbold (2004):

$$y_t = \begin{cases} \alpha + \beta_1 t + v_t & t \leq \lambda T \\ \alpha + \beta_1 \lambda T + \beta_2 (t - \lambda T) + v_t & t > \lambda T \end{cases} \quad (35)$$

$$v_t = \phi v_{t-1} + \varepsilon_t \quad (36)$$

Donde:

$$\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2); \text{ y } \lambda \in (0, 1).$$

En el caso de la hipótesis de raíz unitaria, y_t es un proceso $I(1)$ con caminata aleatoria alrededor de una tendencia lineal que cambia de valor en la observación λT . El cambio de la pendiente está representada por β_1 y β_2 los cuales satisfacen las siguientes propiedades:

$$\beta_1 = \sigma \frac{k_1}{\sqrt{T}} \quad (37)$$

$$\beta_2 = \sigma \frac{k_2}{\sqrt{T}} \quad (38)$$

Donde:

σ es la desviación estándar de la variable aleatoria ε_t ; y
 k_1 y k_2 son dos constantes arbitrarias de la parametrización.

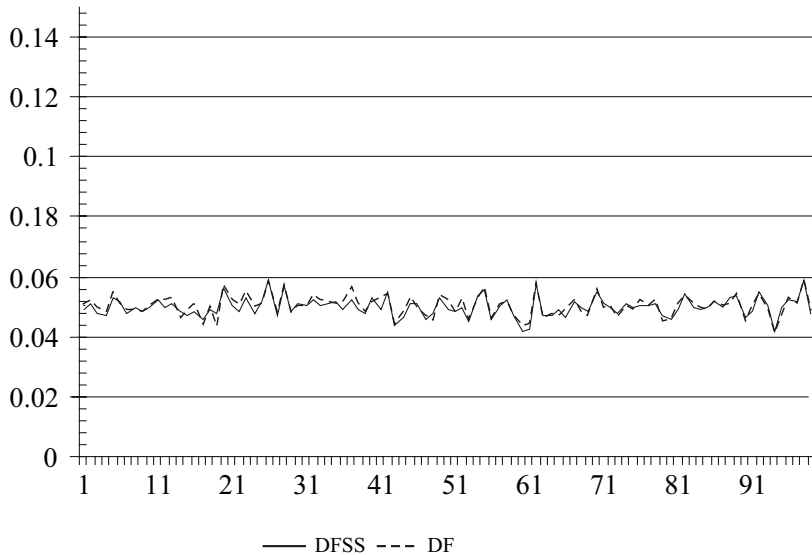
Siguiendo a Kim, Leybourne y Newbold (2004), dadas las condiciones anteriores, el DF sigue una determinada distribución teórica asintótica si la estimación procede en términos de una ‘mala especificación’. En particular, de acuerdo con los autores, si la ecuación estimada se caracteriza por la ausencia de la tendencia temporal, existe una gran distorsión en el tamaño de la prueba DF, sobre todo si k_1 y k_2 toman valores como $k_i = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$. Por supuesto, el procedimiento de omitir el tiempo en la regresión estimada es inapropiado.³ En nuestro caso, por el contrario, procederemos estimando la componente determinista del modelo estadístico que anida a los procesos $I(1)$ y $I(0)$, lo cual incluye a la tendencia de tiempo. De esta manera, no cometemos el error de especificación en la regresión estimada, sino aceptamos la presencia de una tendencia determinista en los datos acompañada de errores aleatorios acompañados de variaciones aleatorias.

La Gráfica 1 muestra las simulaciones de Monte Carlo en el caso de la frecuencia de rechazo de la hipótesis nula de valores $k_1 \neq k_2$ cercanos a cero ($k_1 = 0.05$ y $k_2 = 0.1$). Las simulaciones incluyen 5,000 réplicas y se basan en números aleatorios de la distribución normal estándar para muestras de tamaño 100. Se ha utilizado los valores críticos de los cuadros 1 y 2 al 5% nominal para medir las frecuencias de rechazo. La conclusión de estos resultados es que ambos esta-

³ Kim, Leybourne y Newbold (2004) están conscientes de este problema, por lo cual su estudio es un antecedente para el presente trabajo.

dísticos prácticamente preservan el tamaño de la prueba estadística en el caso de valores ínfimos para el parámetro β . El porcentaje de rechazo de la hipótesis nula es aproximadamente 5%, tal como visualmente se constata.

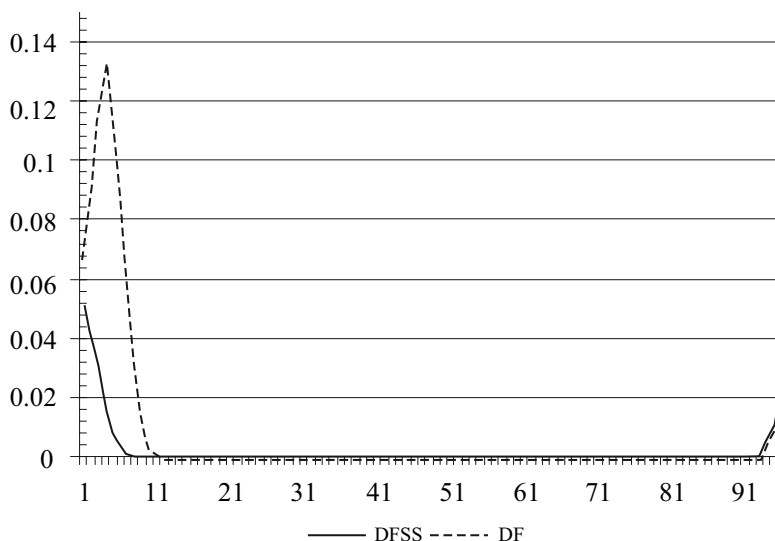
Gráfica 1
Frecuencia de rechazo de la hipótesis nula: estadísticos DF y DFSS



Nota: $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.1$, $T = 100$, 5,000 repeticiones.

Cuando k_1 y k_2 exhiben valores grandes, la situación es diferente pues el cambio estructural de la pendiente de la tendencia lineal pasa de $k_1 = 0.05$ a $k_2 = 20$ (véase Gráfica 2). El valor nominal de 5% se distorsiona al inicio y después cae a cero en prácticamente el resto de la muestra. Obsérvese que en las primeras observaciones, el tamaño de la prueba del estadístico DF no se preserva, ya que la frecuencia de rechazo supera 5%. Sin embargo no es el caso del estadístico DFSS, el cual conserva su tamaño nominal. Por lo tanto, el estadístico DFSS es más robusto cuando hay rompimientos de la tendencia lineal bajo la hipótesis nula. La excepción pudiera darse al final de la muestra puesto que ambos estadísticos exhiben algunas tasas de rechazo cercanas e inferiores a 5%.

Gráfica 2
Frecuencia de rechazo de la hipótesis nula: estadísticos DF y DFSS



Nota: $k_1 = 0.05$, $k_2 = 20$, $T = 100$, 5,000 repeticiones.

La perspectiva de una distorsión al final del proceso está latente, ya que para valores de k_1 y k_2 ‘grandes’ es previsible la aparición de ciertas anomalías al final de la muestra. Sin embargo, tal problemática es independiente del resultado que se aplica al rompimiento inicial del parámetro del proceso estocástico bajo la hipótesis nula. Por lo tanto, la recomendación es utilizar el ajuste recursivo de Shin-So sometido al filtro de Taylor. La inferencia es que el DFSS reconocerá a los datos de una caminata aleatoria con intercepto sujeta a cambio estructural, sin importar la magnitud del parámetro. En tal perspectiva, la naturaleza de los resultados es igual que los de Cook (2002, 2003) y Leybourne, Mills y Newbold (1998) para rompimientos de la hipótesis nula correspondiente a una caminata aleatoria sin intercepto. De esta manera, los resultados de este artículo constituyen una generalización en el caso de rompimientos bajo la hipótesis nula de caminatas aleatorias.

4. La PPC en México

Enseguida consideramos un ejemplo típico en el que rutinariamente se utiliza la prueba DF en el análisis econométrico. Con dicho ejemplo se muestra que existe el

peligro de rechazar la hipótesis nula, tal como muchos estudios econométricos lo ilustran para el índice del tipo de cambio real.

La globalización ha coadyuvado al proceso de integración de las economías y los mercados mundiales, lo cual se ha sostenido gracias a la reducción de las barreras comerciales y al auge del comercio mundial, la estandarización de los bienes y servicios y la reducción del espacio geográfico por las mejoras en las telecomunicaciones y los transportes. En estas condiciones, los bienes y servicios tienden a poseer el mismo precio en términos de una ‘divisa vehículo’. El estudio de la relación entre los niveles de precios de dos países y el tipo de cambio entre sus monedas compete a la teoría de la PPC. Bajo ciertas condiciones, dicha teoría afirma que los tipos de cambio de las diversas monedas tienen el mismo poder adquisitivo. En otras palabras, la PPC sostiene que el tipo de cambio nominal entre dos monedas debe ser igual al cociente del nivel de precios de las dos economías, de tal manera que la unidad monetaria doméstica tiene el mismo poder de compra que la moneda de un país extranjero. Este cometido se alcanza gracias a la eficiencia de los mercados y al arbitraje internacional (por el diferencial de los precios), donde la ‘ley de un solo precio’ desempeña un papel importante gracias a los factores que posibilitan la integración de los mercados mundiales, además de la existencia de las oportunidades de arbitraje.

La PPC en algunos modelos macroeconómicos aparece como una condición de equilibrio de largo plazo, o bien como una referencia según sean las desviaciones del tipo de cambio real en relación con un ‘equilibrio’ validado por el cumplimiento de la PPC. En tal perspectiva, si la PPC es sostenible, la orientación de la política económica está condicionada a la administración del tipo de cambio nominal. Por ejemplo, la autoridad monetaria de una economía pequeña tomadora de precios mundiales podría fijar el tipo de cambio nominal en menor medida de lo indicado por la evolución de los precios relativos, forzando a que estos últimos se ajusten al valor de equilibrio bajo la premisa de que en el largo plazo se satisface la PPC.

Por otro lado, el contraste empírico de la PPC no ha resultado en una clara evidencia para justificar su amplia utilización en la teoría macroeconómica, por el contrario, numerosos estudios econométricos reportan una conclusión negativa.⁴ Una manera de contrastar la PPC es mediante la prueba de raíz unitaria. Por lo tanto, si la PPC de largo plazo es insostenible, entonces el tipo de cambio real debe ser un proceso no estacionario. En tal caso, las desviaciones de la PPC se acumularán, por lo cual no existirá ninguna evidencia de que en el largo plazo se verifique la PPC.

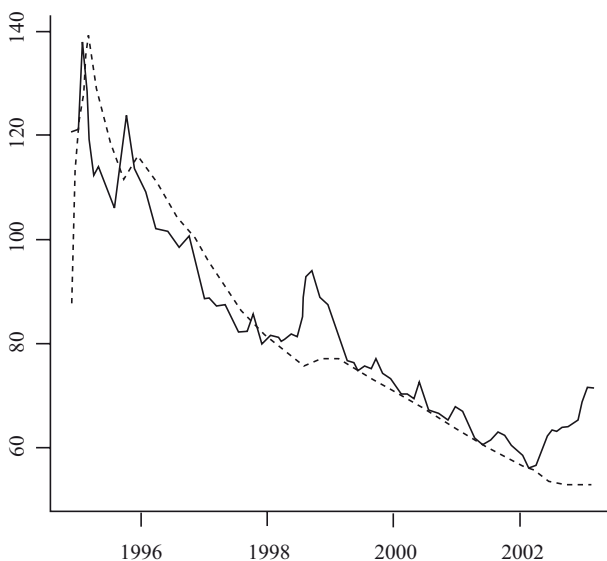
No obstante, para probar la PPC hay que enfrentar la dificultad del índice de precios a utilizar. Suponiendo que el problema se resuelve al escoger una canasta

⁴ Véanse las referencias que indican Perez y Vega (1994) para el caso de la PPC tanto bilateral como multilateral.

de bienes con la cobertura de 111 países, tal como el índice del tipo de cambio real del Banco de México (BANXICO), la siguiente dificultad es el periodo específico a estudiar, puesto que la historia mexicana está plagada por muchos periodos de ajustes ‘bruscos’ de depreciaciones de la moneda nacional que podrían distorsionar la evaluación. Por ejemplo, uno de los ‘puntos de quiebre’ más importantes para la política monetaria ha sido el periodo que empieza en diciembre de 1994, en el cual el peso mexicano experimentó una depreciación del orden de 50%.

Por lo tanto, dado el índice del tipo de cambio real, se puede contrastar la hipótesis nula de raíz unitaria ante las alternativas de estacionariedad. En la Gráfica 3 se reporta el comportamiento mensual del índice del tipo de cambio real (línea continua) a partir de diciembre de 1994 hasta marzo 2003. La elección de la muestra se debe a la información de la existencia de un ‘cambio estructural’ en la economía mexicana producto de la crisis de balanza de pagos. La línea discontinua denota la estimación recursiva de la tendencia, con la cual se hace evidente la existencia de un ‘quiebre’ en la pendiente al principio de la muestra. De esta manera, están dadas las condiciones para aplicar las pruebas DF y DFSS.

Gráfica 3
Índice mensual del tipo de cambio real de México, 1994:12-2003:3
(base 1990)



Fuente: Elaboración propia con base en *Datos Mensuales del Tipo de Cambio Real*, BANXICO (www.banxico.org.mx)

Los resultados del contraste estadístico se reportan en el Cuadro 4, donde las constantes críticas (que se toman en cuenta en la decisión de rechazar la hipótesis nula) fueron calculadas a partir de las simulaciones de Monte Carlo del proceso bajo la hipótesis nula de un proceso $I(1)$, con un intercepto igual a cero y asociado con un ruido blanco (normal estándar) para un total de 5,000 replicaciones. A este respecto, la constante crítica de la prueba DF es dependiente del valor del intercepto con que los datos fueron generados, por lo cual desde luego es de esperar que la misma incida en la decisión de rechazar o aceptar la hipótesis nula (sobre todo si tal supuesto no se cumple). Por su parte, la constante crítica de la prueba DFSS es independiente del valor del parámetro β bajo la hipótesis nula por lo que no influirá en una decisión incorrecta.

Cuadro 4
Prueba de raíz unitaria para el índice del tipo de cambio real de México

<i>Periodo</i>	<i>T</i>	$\hat{\phi}$	<i>DFSS</i>	$C_{0.05}$	<i>Decisión sobre H_0</i>
1994:12-2003:3	100	0.67	-31.64	-24.82	Se rechaza
1994:12-2005:4	150	0.94	-9.32	-22.87	No se rechaza
1994:12-2009:1	170	0.96	-6.71	-21.20	No se rechaza
<i>Periodo</i>	<i>T</i>	$\hat{\phi}'$	<i>DFSS</i>	$C_{0.05}$	<i>Decisión sobre H_0</i>
1994:12-2003:3	100	0.91	-8.97	-16.80	No se rechaza
1994:12-2005:4	150	0.98	-2.88	-17.90	No se rechaza
1994:12-2009:1	170	1.00	-0.82	-19.34	No se rechaza

Nota: $C_{0.05}$ = cuantil 5% del estadístico, 5,000 replicaciones.

Por otro lado, con la idea de considerar diferentes tamaños de muestra, en el Cuadro 4 se han incluido diferentes tamaños de muestra T , los cuales fueron establecidos de acuerdo con la disponibilidad de datos. Obsérvese que en la Gráfica 4 sólo se incluye el periodo de diciembre de 2004 a marzo de 2003. Por su parte, en dicho cuadro, el contraste de la raíz unitaria abarca hasta 170 datos, lo cual significa que la información es desde diciembre de 1994 hasta enero de 2009.

El peligro de rechazar la hipótesis nula (siendo ésta el proceso verdadero) se encuentra latente cuando el tamaño de la muestra es pequeño, sin embargo, cuando el periodo es 1994:12–2003:3 se tiene un total de 100 observaciones. Por lo tanto, el problema subyacente no es el tamaño de la muestra, sino la presencia del ‘cambio estructural’ al principio de la muestra. Este último factor incide en la decisión sobre la hipótesis nula de la prueba DF, lo cual se refleja en la estimación del coeficiente autorregresivo ϕ del orden de 0.67, un valor muy alejado de la unidad. Esta dificultad no se presenta cuando los datos son contrastados con la prueba

DFSS, con la cual el valor estimado de ϕ está cerca de la unidad y con ello no se rechaza la hipótesis nula.

La evaluación con la prueba DF adquiere un carácter diferente cuando el tamaño de la muestra es de 150 ó 170. En tal situación, con una mayor cantidad de datos, la influencia del ‘quiebre inicial’ desaparece. La estimación del coeficiente autorregresivo para tales casos está cerca de la unidad. Por lo tanto, lo que este ejemplo muestra es el peligro de utilizar la prueba DF cuando hay quiebres al principio de la muestra. La recomendación es utilizar la prueba DFSS en el análisis econométrico independientemente de si T es pequeña o si existen ‘quiebres’ en el proceso generador de datos bajo la hipótesis nula.

Conclusiones

Sea la hipótesis nula una caminata aleatoria con intercepto y la hipótesis alternativa un proceso estacionario alrededor de una tendencia lineal, entonces el estadístico DFSS podría ser robusto ante rompimientos iniciales bajo la hipótesis nula siempre que los datos se sometan al filtro de Taylor. El grado de robustez se cuantifica por la capacidad del estadístico para salir airoso ante una posible distorsión en el tamaño de la prueba. Cook (2002, 2003) presenta evidencia de dicha propiedad para el caso de un paseo aleatorio ‘sin intercepto’. En este artículo se ha extendido los resultados de Cook en tres direcciones: 1) la hipótesis nula es un paseo aleatorio ‘con intercepto’, lo cual significa que se tiene un caso más general; 2) el estadístico DFSS sujeto a la transformación de Taylor (2002) alcanza una mayor potencia entre los estadísticos DF y DFSS; y 3) se corrobora la robustez del estadístico DFSS para rompimientos iniciales bajo la hipótesis nula, siempre y cuando los datos se filtren.

La necesidad de transformar los datos se debe a que el DFSS depende del parámetro del intercepto de la caminata aleatoria. Esta es una cuestión muy aparte de la posibilidad de rompimientos bajo la hipótesis nula. En efecto, si el valor del intercepto es ‘grande’, entonces el DF no sólo exhibirá una menor potencia comparado con el estadístico DFSS, sino también una distorsión severa en el tamaño de la prueba. Por tal motivo, es necesario adoptar algún método el cual posibilite que la prueba sea invariante al parámetro. Si bien el espectro es amplio, la que corresponde a Taylor es la mejor.⁵ En tales condiciones, el DFSS es robusto ante los rompimientos iniciales bajo la hipótesis nula.

En este artículo hemos ilustrado por simulación Monte Carlo que la prueba DFSS se comporta mucho mejor que la prueba DF cuando se utiliza el ajuste recursivo

⁵ Véanse Rodrigues (2006) y Chang (2002).

de Shin-So y el proceso generador de datos es una caminata aleatoria con intercepto sujeto a rompimientos en su parámetro. Por consiguiente, dada la caracterización anterior, el uso de la prueba DFSS es recomendable en el análisis econométrico, tal como se ilustra en el caso de la teoría de la PPC. El grado de distorsión en el tamaño de la prueba puede ser importante por lo cual es necesario utilizar un estadístico robusto, tal como la prueba DFSS sobre todo si se tiene información de la existencia de un cambio estructural en el sistema económico. Dicho de otra manera, la naturaleza del problema aplica a otras variables económicas y no sólo al índice del tipo de cambio real en un entorno de cambios recurrentes.

Entre las sugerencias para trabajos posteriores se encuentra la preocupación por corroborar los hallazgos de la prueba DFSS en el caso de otras pruebas de raíz unitaria (por ejemplo, la prueba Phillips-Perron) bajo la premisa de reducción del sesgo en la ecuación de la componente determinista. En tal perspectiva existe también la posibilidad de incorporar un término de error más general al caso de un ruido blanco, sin descuidar la potencia de la prueba. Este caso concierne, por ejemplo, a la prueba Dickey-Fuller Ampliada (DFA), si bien es de esperar que los resultados sean similares a los alcanzados para las pruebas DF y DFSS. Además, el estudio sobre dichos estadísticos es una etapa previa y obligada del análisis sobre la prueba DFA.

Finalmente, está la cuestión de que en nuestro estudio los rompimientos iniciales de la muestra son los únicos que interesan para nuestra evaluación y no ningún otro (por ejemplo, el cambio estructural a la mitad de la muestra). Lo anterior se debe a la naturaleza de la especificación del modelo de Kim, Leybourne y Newbold (2004) para estudiar una forma particular de cambio estructural en los parámetros. Por consiguiente, en el futuro este es otro aspecto que deberá profundizarse al nivel de la distribución de probabilidad teórica y empírica del estadístico de prueba implicado por el rompimiento bajo la hipótesis nula.

Referencias bibliográficas

- BANXICO (2009). *Datos Mensuales del Tipo de Cambio Real* (www.banxico.org.mx).
- Bhargava, A. (1986). "On the Theory of Testing for Unit Roots in Observed Time Series", *Review of Economic Studies*, 53(3), pp. 369-384.
- Chang, Y. (2002). "Nonlinear IV Unit Root Tests in Panels with Cross-sectional Dependency", *Journal of Econometrics*, 110(2), pp. 261-292.
- Cook, S. (2003), "Size and Power Properties of Powerful Unit Root Tests in the Presence of Variance Breaks", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 317(3-4), pp. 432-448.

- (2002). “Correcting Size Distortion of the Dickey-Fuller Test via Recursive Mean Adjustment”, *Statistics and Probability Letters*, 60(1), pp. 75-79.
- Dickey, D. A. and W. A. Fuller (1981). “Likelihood Ratio Statistics for Autogressive Time Series with a Unit Root”, *Econometrica*, 49(4), pp. 1057-1072.
- (1979). “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root”, *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), pp. 427-431.
- Kim, T. H., S. Leybourne and P. Newbold (2004). “Behavior of Dickey-Fuller Unit Root Tests Under Trend Misspecification”, *Journal of Time Series Analysis*, 25(5), pp. 755-764.
- (2002). “Unit Root Test with a Break in Innovation Variance”, *Journal of Econometrics*, 109(2), pp. 365-387.
- Leybourne, S. and P. Newbold (2000). “Behavior of the Standard and Symmetric Dickey-Fuller Type Tests When There Is a Break under the Null Hypothesis”, *Econometrics Journal*, 3(1), pp. 1-15.
- Leybourne, S., T. Mills and P. Newbold (1998). “Spurious Rejections by Dickey-Fuller Test in the Presence of a Break under the Null”, *Journal of Econometrics*, 87(1), pp. 191-203.
- Maddala, G. S. and In-Moo Kim (1998). *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Nelson, C. and C. Plosser (1982). “Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series”, *Journal of Monetary Economics*, 10(2), pp. 139-162.
- Pérez J., María y Juan Luis Vega C. (1994). “Paridad del Poder de Compra: Un Análisis Empírico”, *Investigaciones Económicas*, 18(3), pp. 539-556.
- Perron, P. (1989). “The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis”, *Econometrica*, 57(6), pp. 1361-1401.
- Rodrigues, P. (2006). “Properties of Recursive Trend-Adjusted Unit Root Tests”, *Economics Letters*, 91(3), pp. 413-419.
- Shin, D. W. and B. S. So (2002). “Recursive Mean Adjustment and Test for Non-stationarities”, *Economics Letters*, 75(2), pp. 203-208
- (2001). “Recursive Mean Adjustment for Unit Root Tests”, *Journal of Time Series Analysis*, 22(5), pp. 595-612.
- So, B. S. and D. W. Shin (1999). “Recursive Mean Adjustment in Time-Series Inferences”, *Statistics and Probability Letters*, 43(1), pp. 65-73.
- Taylor, A. (2002). “Regression-based Unit Root tests with Recursive Mean Adjustment for Seasonal and Nonseasonal Time Series”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(2), pp. 269-281.