Análisis Económico
Núm. 67, vol. XXVIII
Primer cuatrimestre de 2013

Dinámica regresiva en la agricultura

(Recibido: agosto/012–aprobado: octubre/012)

*Carlos Islas Moreno**
*Alberto Quezada Téllez***

Resumen

El propósito del artículo es analizar de manera cualitativa la dinámica en un modelo de crecimiento, mediante la participación de la agricultura en el PIB y la productividad agrícola. Para construir el modelo tomamos en cuenta el modelo en dinámica progresiva propuesto por Vesna. D. Jablanovic, en el cual se analiza la estabilidad local del sistema y por medio de éste se propone una nueva manera de hacer modelación en dinámica regresiva, usando los límites inversos.

Palabras clave: agricultura, límites inversos, caos, dinámica progresiva y regresiva.
Clasificación JEL: Q10, D20 y C02.

* Profesor de la Academia de Dinámica No Lineal y Sistemas Complejos de la UACM (islas@matem.unam.mx).
** Profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM (alquezada@gmail.com). Los autores agradecen el apoyo financiero al ICYTDF (PI2010-47).

Introducción

En la actualidad existe una vasta literatura en la teoría del crecimiento económico. A partir del *Modelo de Crecimiento Económico* más simple como es el de Solow (véase Solow, 1956), encontramos diferentes modelos que analizan de manera cualitativa el comportamiento de la economía a través del tiempo, a partir de cierta combinación en los factores productivos. Muchos de ellos toman *per se* que en un determinado periodo el modelo convergerá al equilibrio del estado estacionario.

El presente trabajo muestra que ciertos modelos pueden generar comportamientos caóticos –el caso de la ecuación logística–, sin que ello permita llegar a un estado estacionario. Por ello, se analiza la dinámica regresiva en un modelo de crecimiento económico, dada su participación de la agricultura en la producción (PIB) y su productividad, el cual ha sido ya estudiado por Vesna D. Jablanovic (véase Jablanovic, 2005).

Los resultados obtenidos por esta autora muestran que la dinámica del modelo de crecimiento económico es caótica, en el sentido de Li-Yorke, para ciertos valores del parámetro. Jablanovic menciona que la participación de la agricultura dentro del proceso de crecimiento económico, disminuye, debido a que la demanda de los productos agrícolas tiende a ser inelástica, con respecto al precio y dicho crecimiento económico genera mejoras en la productividad.

Existen investigaciones realizadas en dinámica progresiva como las de Chen, Li y Lin (2008), que describen la transición económica en un Modelo de Generaciones Traslapadas (OGM), la cual estudia el comportamiento agregado de economías formadas por dos o más generaciones de individuos, que conviven al mismo tiempo con acumulación de capital bajo tres diferentes expectativas: previsión perfecta, expectativa miope y la expectativa adaptativa. Prueban que sólo ocurre una dinámica simple bajo la previsión perfecta. Para el caso de las expectativas miopes, indican la formación de *ciclos límite*,[1] cuando la elasticidad intertemporal de sustitución aumenta y se presenta una dinámica caótica, al ser dicha elasticidad lo suficientemente grande. Para el último caso de expectativa adaptativa, la elasticidad intertemporal de sustitución y el peso de la información pasada es de suma importancia para determinar la complejidad de la dinámica.

Por otro lado, Gardini *et al*. (2009), determinan las propiedades necesarias para obtener el equilibrio económico utilizando la dinámica regresiva. Mediante el

[1] Un ciclo límite es una trayectoria aislada y cerrada, es decir, no existen otras trayectorias cerradas en la vecindad de ésta y, por lo tanto, las trayectorias vecinas a ella se mueven en espiral acercándose o alejándose del ciclo límite.

uso de la función iterada (IFS) describe el equilibrio en una, así como en dos dimensiones. El atractor[2] asociado con la IFS describe un amplio conjunto de comportamientos en la dinámica progresiva. Las trayectorias progresivas se pueden obtener con aplicaciones aleatorias en las asignaciones inversas de la dinámica regresiva. Las trayectorias de estos IFS aleatorios se pueden interpretar como regiones de equilibrio, donde la secuencia aleatoria de estas regiones determina la selección de equilibrio en cada una de las órbitas.

En los últimos años, la dinámica regresiva ha sido aplicada en modelos macroeconómicos, donde involucran fenómenos cuya dependencia del tiempo está dada en forma regresiva, es decir, modelos en los que se presentan variables determinadas, por lo cual se espera que suceda en el futuro, o sus valores en el periodo de tiempo siguiente.

Kennedy (2008), Raines y Stockman (2007) entre otros autores, se han dedicado a estudiar aplicaciones de los límites inversos –herramienta topológica utilizada para analizar la estabilidad de los sistemas– como es en el OGM y en el Modelo Cash in Advance. Estos modelos han demostrado que su dinámica regresiva se encuentra determinada por ciclos límite o por dinámicas caóticas.

Nuestro propósito es analizar la dinámica regresiva del modelo propuesto por Jablanovic, mediante los límites inversos. Esta herramienta topológica, nos permite determinar la estabilidad o inestabilidad del sistema. Se expone el modelo agrícola en dinámica progresiva, investigado por Jablanovic (2005) así como el propuesto por los autores en dinámica regresiva.

1. Preliminares

1.1 Económicos

El crecimiento económico permite a los investigadores del tema, medir el aumento o disminución en la producción que genera una nación en un periodo de tiempo determinado. El crecimiento económico es una variable de vital importancia, ya que su comportamiento positivo se traduce en mayores niveles de consumo, inversión, de empleos, ingresos públicos, así como de otras variables económicas. Aunque el sector terciario es la actividad que más aporta al PIB, el sector agrícola también juega un papel clave en la economía nacional.

[2] Un atractor es el conjunto de características que representan cómo evoluciona el sistema, después de un tiempo suficientemente largo.

Recordemos que el sector agrícola, a principios del siglo XX, se concebía como la actividad económica que mayor aportación tenía en la producción nacional. Un siglo más tarde, esta actividad alcanza escasos niveles en la participación de la producción. Por ello, si nuestro campo fuese más productivo esto se vería representado en una mayor producción nacional.

Sin embargo, para tener un agro más productivo, se requiere que aumente la producción de bienes por parte del sector. No sólo falta incrementar la inversión pública y privada hacia esta actividad, también se necesita mano de obra y la tecnología apropiada que le permitan mejorar su productividad. La productividad en este trabajo, es entendida como la relación existente entre las unidades producidas y el número de trabajadores empleados.

1.2 Límites inversos

En general, estos límites se definen como conjuntos con estructuras más complicadas, pero para los fines de este artículo, los definimos en algunos conjuntos acotados del plano $\mathbf{R}^2$, en los continuos.

Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo. Sólo trabajaremos con continuos del plano $\mathbf{R}^2$. Por ello los continuos, los veremos como subconjuntos de este espacio, que cumplen con ser cerrados, acotados y los cuales no se pueden ver dentro de conjuntos separados o con más de una pieza. Si **X** y **Y** son continuos e **Y** contenido en **X**, entonces **Y** es un subcontinuo de **X**. Un continuo es descomponible si éste es la unión de 2 de sus subcontinuos propios. Si un continuo no es descomponible, éste se llamará indescomponible.

Se tiene que es más frecuente encontrar continuos indescomponibles que descomponibles (Macías, 2005). Los primeros, además de que existen, tienen una presencia importante en sistemas dinámicos caóticos. Tal es el caso del continuo indescomponible de Knaster, el cual es el atractor conocido como la *Herradura de Smale*.

Daremos ahora la definición formal de límite inverso, la cual se podría ver en Nadler Jr. (1992). Sean $\{\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3},\ldots\}$ una sucesión de continuos y $\{\mathbf{f^2{}_1}, \mathbf{f^3{}_2}, \mathbf{f^4{}_3},\ldots\}$ una sucesión de funciones continuas y suprayectivas, tales que $\mathbf{f^{i+1}{}_i}\colon \mathbf{X_{i+1}} \to \mathbf{X_i}$ para cada $\mathbf{i}$ en $\{1, 2,\ldots\}$. Llamaremos a la sucesión $\left\{X_i, f_i^{i+1}\right\}_{i=1}^{\infty}$, una sucesión inversa y el límite inverso al espacio

$$X_\infty = \varprojlim\left\{X_n, f_n^{n+1}\right\} = \left\{(x_1, x_2,\ldots) : \text{para cada } n \in \mathbb{N}, f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n\right\}$$

Considerado como subespacio del espacio producto $P_{n=1}^{\infty} X_n$. Cada $\mathbf{X_n}$ es llamado espacio factor del límite inverso y f_n^{n+1} son las funciones de ligadura.

Sea $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$. Si **A** es un subconjunto cerrado de X_∞ , entonces:

$$A = \varprojlim \left\{ \pi_n(A), f_n^{n+1} \Big|_{\pi_{n+1}(A)} \right\} = \Pi_{n=1}^{\infty} \pi_n(A) \cap X_\infty$$

Entonces, el límite inverso parecería complicado, pues es un subconjunto de algo que tiene dimensión infinita. Pero hay resultados importantes que nos ayudan a ver que algunos límites inversos son más fáciles, pues se sabe que:

Si $f : X \to X$ es un *homeomorfismo*,[1] $X_\infty = \varprojlim \{X, f\}$ s homeomorfo en **X**.

Es decir, el límite inverso, independiente de donde fue creado (dentro de algo que tiene dimensión infinita), es algo homeomorfo a **X**. Claro, hay otros modelos o ejemplos de límites inversos que son más complicados, como el indescomponible ejemplo de Knaster. Aunque, tampoco es tan difícil, pues también se sabe que es un límite inverso formado con espacios factores intervalos y una sola función de ligadura, este tipo de continuos se pueden encajar en el plano $\mathbf{R}^2$ (Ingram, 2003).

Recordemos que uno de los propósitos de esta investigación es usar las herramientas que ya existen en límites inversos, para describir ciertos conjuntos indescomponible creados con algunas funciones caóticas, verificar dónde se crean estos conjuntos y describir esas trayectorias. Barge y Diamond (1994), mostraron que si **f** es caótica entonces el límite inverso construido usando a **f** en **I** = [0,1] como función de ligadura, contiene un subcontinuo indescomponible.

Más aún muestran que si **f**: **X** → **X** es continua y **X** es una gráfica finita (en particular en un intervalo). Entonces, las siguientes son equivalentes:

a) La entropia de **f** es positiva.
b) El límite inverso generado con f contiene un continuo indescomponible.
c) La función f contiene una "*herradura*".
d) Existen r, $\mathbf{M} \in \mathbf{N}$ tales que para $m \geq \mathbf{M}$, **f** tiene un punto periódico de periodo rm (Barge y Diamond, 1994).

[3] Un homeomorfismo es una biyección entre dos espacios topológicos, por una aplicación biyectiva que es continua y cuya inversam es continua.

Li y Yorke en 1975 prueban que una función si tiene órbitas de periodo tres implicará caos. Kennedy (2008) describe el análisis del caos en dos modelos de dinámica regresiva, en ese sentido, a continuación describimos bajo ciertos supuestos económicos dos modelos dinámicos y a partir de ello estudiamos su estabilidad.

2. Modelo

En el modelo de Jablanovic se relaciona la tasa de crecimiento de una economía nacional, en su caso dada por el PIB, con una función de producción específica y la participación de la agricultura en la producción nacional. De esta relación obtiene una ecuación en diferencias de primer grado no lineal, la cuál realizando un cambio de variable resulta una ecuación conocida como *logística*: $\mathbf{Z_{t+1}} = \pi^*\mathbf{Z_t}(1 - \mathbf{Z_t})$, $\mathbf{Z_t} \in [0, 1]$. A continuación presentamos dos modelos:

2.1 Previsión Progresiva Perfecta

Iniciamos nuestro modelo económico en dinámica progresiva. Este modelo nos permitirá analizar de manera cualitativa la estabilidad local del crecimiento económico. Para ello será necesario determinar los supuestos y las variables de nuestro modelo. Tomamos la tasa autónoma del PIB, como el crecimiento α, es decir:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{Y}_{t+1} - \mathbf{Y}_t)/\mathbf{Y}_t \tag{1}$$

Pero, como en el modelo descrito en (7), suponemos que el incremento del PIB, es decir $(\mathbf{Y}_{t+1} - \mathbf{Y}_t)/\mathbf{Y}_t$, depende de la productividad de la agricultura $(\mathbf{L}_t/\mathbf{Y}_t)$, así como $\mathbf{P}_t$ es la participación del sector agrícola en el PIB $(\mathbf{P}_t/\mathbf{Y}_t)$, por lo que tenemos entonces:

$$(\mathbf{Y}_{t+1} - \mathbf{Y}_t) / \mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}^*(\mathbf{L}_t/\mathbf{Y}_t) - \Upsilon^*(\mathbf{P}_t/\mathbf{Y}_t) \tag{2}$$

Ahora, si tomamos una función de producción con rendimientos constantes a escala:

$$\mathbf{Y}_t = \lambda^*\mathbf{L}_t \tag{3}$$

Donde:

L=es la fuerza laboral; y

$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\lambda}$ y **Y=**son parámetros.

Por otro parte, la agricultura contribuye a la producción nacional PIB, es decir, su participación está dada por:

$$\mathbf{P}_t = \delta^* \mathbf{Y}_t \tag{4}$$

algebraicamente obtenemos:

$$\mathbf{Y}_{t+1} = (\boldsymbol{\alpha} \textbf{ - } (\boldsymbol{\beta}/\lambda) - \Upsilon\delta\mathbf{+1})\ \mathbf{Y}_t \tag{5}$$

En (5) tenemos una ecuación en diferencia lineal de primer orden. Podemos observar que la producción en el periodo *t+1* dependerá del comportamiento del mismo producto en el periodo *t*. Este modelo aunque es estable y fácil de predecir, su evolución divergente estará en función del parámetro $(\boldsymbol{\alpha}\textbf{-}(\boldsymbol{\beta}/\lambda)-\Upsilon\delta\mathbf{+1})$.

2.2 Previsión en Dinámica Regresiva

En nuestro siguiente modelo realizamos un cambio en los supuestos necesarios para su análisis. La nueva función de producción y la relación de la participación en la agricultura en la producción nacional, se tiene:

$$\mathbf{Y}_{t+1} = \lambda^*\mathbf{L}_t^{\,(1/2)} \tag{6}$$

$$\mathbf{Y}_{t+1} = \delta^* \mathbf{P}_t \tag{7}$$

y mediante manejo algebraico y un cambio de variable, obtenemos;

$$\mathbf{Y}_t = \kappa\ \mathbf{Y}_{t+1}(1-(\omega/\ \nu)\ \mathbf{Y}_{t+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{Y}_{t+1}) \tag{8}$$

En la ecuación (8) tenemos una función del estilo logístico, pero en términos de dinámica regresiva. Hacemos énfasis en que nuestra producción dependerá de la misma producción pero del periodo siguiente. De acuerdo a lo descrito por Ingram (2003), esta función satisface las condiciones para que su límite inverso, detallado por la función logística **f**, resulte ser un continuo homeomorfo al continuo de Knaster. Por lo que $X_\infty\ \varprojlim\ \{I, f\}$ posee un continuo indescomponible (la herradura que describimos en la sección anterior), por Barge y Diamond, **f** debe tener entropía topológica positiva y con ello, **f** es caótica en el sentido de Kennedy (2008).

De ello concluimos que si $X_\infty \varprojlim \{I, f\}$ contiene un subcontinuo indescomponible, entonces nuestro modelo de crecimiento presenta un comportamiento caótico para ciertas regiones; pero si encontramos un arco o un rayo entonces tendremos estabilidad.

Conclusiones

Se proponen dos modelos cualitativos del crecimiento económico, a partir de la participación de la agricultura en la producción nacional, y de la productividad del mismo sector agrícola. El primero de ellos, el de previsión progresiva perfecta resulta estable en el tiempo y de fácil predicción. La sensibilidad de su parámetro determinará la proporción en la cual crecerá la producción para el siguiente periodo.

En el modelo de dinámica regresiva se muestra que si encontramos un indescomponible, el modelo presentará un comportamiento caótico. Éste presentará regiones caóticas si es un subcontinuo indescomponible, y la estabilidad para un arco o rayo. Estos casos estarán presentes dado la sensibilidad del parámetro κ.

Queda mucho camino por recorrer para que estos modelos, estudiados mediante límites inversos, permitan dotar de información a los gobiernos y se traduzcan en mejores políticas económicas.

Referencias bibliográficas

Barge, M. and B. Diamond (1994). "The dynamics of continuous maps of finite graphs through inverse limits", *Transactions of the American Math Society*, No. 344, 773–790.

Bennett, R. (1962). "On inverse limit sequences", *Master's Thesis*, University of Tennessee.

Chen, Hung–Ju; Ming-Chia Li and Yung–Ju Lin (2008). "Chaotic dynamics in an overlapping generations model with myopic and adaptive expectations", *Journal of Economic Behavior & Organization*, No. 67, pp. 48–56.

Gardini, Laura; Cars Hommes; Fabio Tramontana and Robin De Vilder (2009). "Forward and backward dynamics in implicitly defined overlapping generations models", *Journal of Economic Behavior & Organization,* No. 71, pp. 110–129.

Ingram, W. T. (1995). "Periodicity and indecomposibility", *Proceedings of the American Mathematical Society*, No. 128, pp. 1007-1016.

——— (2003). "Families of inverse limits on [0; 1]", *Topology Proceedings*, No. 27, pp. 189-201.

Jablanovic, Vesna (2005). "A Chaotic Economic Growth Model and the Agriculture Share of an Output", *Journal of Agricultural Sciences*, Vol. 50, No 2, pp. 207-216.

Li, T. and J. Yorke (1975). "Period three implies chaos", *American Mathematical Monthly*, No. 82, pp. 985–992.

Kennedy, J. (2008). "Inverse Limits, Economics, and Backward Dynamics", *Revista de la Real Academia Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Serie A: Matemáticas*, Vol. 102 (1), pp. 39–74.

————; Brian Raines and David Stockman (2007). "Expected Utility in Models with Chaos", *Working Paper No. 2007-16*, Department of Economics Alfred Lerner College of Business & Economics, University of Delaware.

Macías, S. (2005). *Topics on Continua*, Chapman & Hall/CRC.

Nadler Jr, S. B. (1992). *Continuum Theory*, New York: Marcel Deker, Inc.

———— (2006). "Hyperspaces of Sets. A text with research questions", *Aportaciones Matemáticas*, Serie Textos # 33, Sociedad Matemática Mexicana.

Solow, Robert M. (1956). "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. LXX, pp. 65-94.