Análisis Económico
Núm. 63, vol. XXVI
Tercer cuatrimestre de 2011

La mutabilidad asintótica de la certeza y la lógica trivalente. Aplicación para asentamientos irregulares de Milpa Alta

(Recibido: abril/011–aprobado: agosto/011)

*Oscar Rogelio Caloca Osorio**
*Cristian Eduardo Leriche Guzmán***

In memoriam de nuestro amigo Julián Ortiz Davison, quien pensaba que las matemáticas no sólo son simétricas sino que también son estéticas.

Resumen

A partir de fenómenos caóticos es posible establecer sistemas dinámicos complejos que ejerzan, en la medida de lo posible, control sobre ellos y considerar que esta trayectoria de la incerteza hacia un entorno de certeza sólo puede operar en el contexto de dos problemáticas. En primer instancia, esta aproximación es asintótica ya que en el proceso ocurre entropía, regulada por la segunda ley de la termodinámica. La segunda se relaciona con la transformación de estos mecanismos operantes en su evaluación, condición que lleva al establecimiento de una lógica trivalente, ello implica una noción de verdad, falsedad y relativamente verdadero, lo cual en cierto sentido corresponde con sistemas asintóticos. Se realiza una aplicación a asentamientos irregulares de la Delegación Milpa Alta del Distrito Federal.

Palabras clave: teoría del caos, certeza, indeterminación, teoría de la verdad, sistemas dinámicos complejos, asentamientos irregulares.
Clasificación JEL: C02, C15, C61.

* Doctorante en Urbanismo por la Facultad de Arquitectura de la UNAM (oscarcalo8@yahoo.com.mx).
** Profesor-Investigador del Departamento de Economía de la UAM-Azcapotzalco. Se agradecen los comentarios de los lectores dictaminadores, con cuya colaboración se ha mejorado la exposición de la investigación.

Introducción

El determinismo nos refiere que las múltiples acciones ejecutadas en la vida por cada uno de nosotros, necesariamente, conducen a un fin establecido en el cual los medios logran sus fines y donde todo está escrito. Una argumentación al respecto dicta que nuestro condicionamiento racional probabilístico objetivo, es suficiente para la determinación de que, con una probabilidad igual a uno, el fenómeno en estudio ocurrirá, es decir, existe un proceso el cual permite obtener certeza sobre el devenir de los fenómenos en estudio. Esto es cuestionable cuando consideramos que todo proceso en la vida mantiene una estrecha relación con la plausibilidad de no ser predicho. Sin embargo, esto no excluye la necesidad de utopía, la cual genera las condicionantes necesarias para que los individuos actúen en su entorno con una convicción o una confianza sobre los resultados deseados.

Dicha necesidad de utopía genera la confianza que conduce a especular o predecir el futuro, el cual está condicionado según nuestras propuestas científicas con el pasado y el presente, sin embargo, el parcial conocimiento del pasado y presente, aun si fuese posible el conocimiento perfecto del pasado y el presente, no nos permite obtener un substancial conocimiento del futuro. Surge lo inesperado a partir de la constitución de los propios sistemas, aunado a que el futuro es una esperanza, puesto que se requeriría estimar la proporción de entropía generada entre el paso del sistema de un espacio-tiempo determinado (presente y pasado) a otro espacio-tiempo (futuro).

En virtud de lo anterior, la presente investigación versa sobre la enunciación de cómo llevar un sistema dinámico caótico a un sistema con un orden asintótico, donde la transformación asintótica implica la presencia de entropía. Para ello, se aborda la problemática a través de las siguientes secciones. En la primera se discurre sobre la cuestión de los sistemas deterministas como condicionamientos invariantes y los procesos indeterministas como sustento de sistemas relativos, con la finalidad de encontrar un argumento que permita contar con algunos atributos de ambas cuestiones, esto es, un sistema el cual indique asintóticamente su estabilidad pero que sólo tienda a ello, permitiendo la existencia de entropía dentro del sistema en cuestión.

La segunda sección trata brevemente sobre algunas cualidades de los sistemas dinámicos complejos, desde los que tienden a la estabilidad hasta aquellos que son caóticos, sin embargo, es menester mencionar que la idea de caos aquí tratada no corresponde a una concepción griega sino a una noción de determinismo caótico. Es decir, se diserta sobre los principales tipos de atractores (corresponde a que los objetos identificados se agrupen en un espacio determinado con una cierta dispersión), estableciendo una recuento del tipo de soluciones de los sistemas dinámicos no lineales. En la tercera parte se dilucida acerca del nacimiento del caos mediante el establecimiento de la diferencia entre sistemas estables e inestables, aludiendo a resultados de las investigaciones de Lyapunov.

La siguiente sección abarca la exposición de un modelo uniecuacional que da cuenta de cómo en la gestación tendencial de un proceso de orden el resultado implica una certeza asintótica, puesto que el sistema no retorna bajo las mismas condiciones de inicio o como empezó y por ende, esto se debe a la entropía experimentada por el mismo. En esta misma sección, se presenta la forma geométrica bidimensional de tal circunstancia, y por último, en esta sección, el modelo es empleado para la realización de una estimación de los procesos de saturación de los territorios aledaños para los asentamientos irregulares localizados en la Delegación Milpa Alta con proyecciones que parten del 2010 y finalizan en intervalos de tiempo mínimo y máximo para la saturación.

La quinta sección corresponde con una deducción sobre la pertinencia de que fenómenos como estos al poder establecerse como nociones de verdad, entendiendo verdad como correspondencia con los hechos, conduce al sostenimiento que la certeza asintótica no es una verdad absoluta, pero tampoco es algo falso absolutamente, simplemente es algo relativamente verdadero o verdadero en cierto sentido.

1. De los procesos deterministas a los indeterministas

La aprehensión sobre las pautas de evolución de los fenómenos humanos se encuentra restringida por las propias condiciones de vida que experimentan los sujetos. Esto conduce necesariamente a que dicho proceso dinámico presente dos controvertidas soluciones o que los fenómenos operen bajo un esquema determinista, es decir, son relojes perfectos o un esquema indeterminista en grado tal que funcionan como nubes (Popper en Miller, 1997).

En este sentido, esta primera sección busca esclarecer algunas circunstancias referentes a la plausibilidad de que los fenómenos sociales puedan ser estudiados en su evolución tendencial. Debido a que estos no son sistemas del todo deterministas, pero tampoco del todo indetermistas, es decir, no puede establecerse un argumento claro en favor de que al observar cierto fenómeno humano, por medio de la intuición, pueda preverse su resultado en un futuro determinado, y de igual manera, tampoco por medios intuicionistas puede establecerse que lo humanos por pertenecer a la conjunción de razón y emociones –si se nos permite la reducción–, implique procesos cuya evolución no se tenga al menos una idea sobre el panorama de lo que ocurrirá con éste; aunque, por supuesto, se desconozcan con precisión los resultados.

La mayoría de los fenómenos sociales no son del todo deterministas ni del todo indeterministas, existe en ellos la conocida relación del llamado caos determinista, donde no se pueden estimar con precisión los valores finales de un hecho ni se puede pensar que son del todo inestimables, el proceso en realidad conlleva a la estructuración de valores probabilísticos, los cuales permiten rangos de pertinencia entre límites inferior y superior siendo probable que ocurran ciertos resultados sobre un fenómeno determinado.

Ello implica que en la mayor parte de los casos no existe una certeza absoluta de que los fenómenos sociales tengan consecuencias determinadas ni la existencia de una incertidumbre absoluta de que la evolución de un fenómeno sea totalmente desconocida. De ahí, esta investigación versa sobre el caos determinista y sobre una idea de lo relativamente verdadero y no de la verdad determinista. En otras palabras, se discurre sobre un fenómeno social con tendencias evolutivas indeterminadas pero con un patrón lo suficientemente sólido que permite hablar de una certeza asintótica, donde el modelo de referencia se modifica sustancialmente en tiempo y dimensiones ante pequeños cambios de los valores de las variables: un modelo sensible a las condiciones iniciales.

El hecho principal es observar de manera predictiva cuál será la evolución de los fenómenos sociales estudiados, con la finalidad de que la información permita generar mecanismos de atención a los fenómenos, ya sea para alentarlos o suprimirlos por medio de las políticas públicas. Ahora, si bien es cierto que la propuesta corresponde con un modelo dinámico complejo determinista, pero sensible a las condiciones iniciales, la idea fundamental es el transitar de una situación de caos a una de cierto orden relativamente verdadero.

En este sentido, se considera como viable que el indeterminismo devenga en un determinismo en función de variables ocultas, identificado en nuestro caso con la entropía. Es decir, que el grado de nuestra ignorancia sea tal que no sea posible conocer todos los parámetros involucrados en la determinación tanto de las proyecciones como de las proyecciones sucesivas, los cuales pudiesen estar acompañando a dicha entropía. Esto no es otra cosa que la existencia de variables a considerar en el futuro y que nuestro nivel de conocimiento de los fenómenos sociales sea limitado (como lo es el conocimiento de todas las cosas para todos y cada uno de los individuos que habitan en el planeta), desde luego este tipo de modelo es una construcción devenida de un mecanismo inductivo para el conocimiento probabilístico sobre la explicación de las cosas y la relación entre ellas.

1.1 Determinismo

En el caso del determinismo es pertinente distinguir entre determinismo físico y determinismo metafísico. Decimos que un sistema físico es determinista si su estado en un momento dado determina unívocamente su estado en cualquier otro momento de su existencia. Si la evolución del sistema está regida por ecuaciones diferenciales, sus propiedades matemáticas típicas –existencia y unicidad de las soluciones– aseguran el determinismo del sistema.[1] La representación de un proceso natural mediante un modelo determinista permite predecir su desarrollo y brinda una comprensión satisfactoria de la necesidad de éste.

Por otra parte, el determinismo metafísico puede caracterizarse simplemente como la extrapolación de aquél a todo acontecer. Esta extrapolación tendría sentido si poseyésemos un modelo matemático adecuado del devenir universal en todos sus detalles, aunque no fuéramos capaces de registrar todas las cantidades que fijan cada uno de sus estados, ni de resolver las ecuaciones con arreglo a las cuales éstos se suceden. Sin embargo, no contamos con tal modelo, y si alguien lo propusiera, no sería fácil corroborarlo. Esto conduce a que el determinismo metafísico no deje de ser sólo un sueño de la razón, cuya falta de base y aun de contenido queda en evidencia al compararlo con los determinismos físicos.

Ahora, no hay que perder de vista dos limitaciones sobre las condiciones de los sistemas deterministas:

1) La predicción de estados futuros y la retrodicción (lo que podamos decir del pasado en este caso, según el modelo determinista) de estados pasados de un sistema determinista tiene como correlato el conocimiento de su estado actual, es decir, éstas se basan en la condición presente del estado del sistema. Como es imposible conocerlo con perfecta precisión, la predicción o retrodicción tiene que ser imprecisa, y su inexactitud aumenta con el lapso del tiempo entre el momento actual y el estado predicho o retrodicho (cómo era el estado pasado según el modelo determinista). En tal caso, la evolución del sistema, aunque estrictamente determinista, es caótica, como veremos es el caso para los sistemas de asentamientos humanos irregulares.
2) La evolución determinista del sistema, con base en las ecuaciones diferenciales del modelo empleado para representarlo, está asegurada en la medida en que el sistema determinista sea un sistema cerrado, es decir, ajeno a la influencia de los factores externos, que no se hayan tenido en cuenta en la especificación del

[1] Para una ampliación de la explicación véase Sametband (1999).

estado inicial. Sin embargo, en el mundo social no hay sistemas perfectamente cerrados y se opta por esta opción con la finalidad de reducir el grado de complejidad del modelo propuesto.

1.2 Indeterminismo

El considerar la postura sobre que todo está determinado siendo el único problema determinar su causa, corresponde con un mecanismo el cual no deja pie a la incertidumbre de la vida social y por ende al indeterminismo de las conductas probabilísticas ejecutadas por los individuos en su transitar cotidiano. Esto necesariamente implica que los individuos pudiesen conocer con exactitud su entorno y las relaciones entre ellos. Lo cual, empíricamente se demuestra como difícil de cumplir, puesto que, en otras palabras, significa que los individuos se conocen así como al universo circundante, y con ello, que pueden extrapolar esta práctica fuera de nuestro vecindario cósmico. Esto, por supuesto, ha sido considerado como un mecanismo de explicación "viable" para los fenómenos sociales, donde, considerándolo como un sistema mecanicista, es posible identificar con gran exactitud cuál es la causa de los fenómenos sociales. Sin embargo, dicha manera de ver y buscar explicar los fenómenos sociales, es de origen dudoso. Puesto que en un sin fin de fenómenos sociales aún se está lejos de conseguir una explicación certera de qué les determina o en su caso, qué les lleva a obtener resultados tan diversos ante someras modificaciones en sus condiciones iniciales, como en los sistemas caóticos.

Lo anterior, el determinismo, claro es que demerita la existencia de condiciones aleatorias determinando el funcionar de los fenómenos sociales a categorías estables, es decir, el uso de la probabilidad tanto objetiva como subjetiva queda relegada a los designios teleológicos de los sistemas. Esto tiene sus orígenes en la aprobación por parte de los científicos de la teoría de Newton y su argumentación a favor de un mundo determinista. Asimismo, se sujeta a las propuestas racionalistas de corte mecanicista, las cuales lo único que estipulan es un comportamiento causa-efecto del individuo; como es el caso de las propuestas elaboradas por Descartes o los argumentos de La Mettrie de que el hombre es una máquina.[2]

En este tipo de inferencias no existe espacio para las alternativas probabilísticas, empero, uno de los principales disidentes del determinismo fue Charles Sanders Peirce, quien "demostró que esta teoría, por muy verídica que fuera, no nos proporciona una razón válida para creer que las nubes son relojes perfectos (…) rechazó la creencia en que este reloj, o cualquier otro, fuera *perfecto*, o que

[2] Para el caso véase Popper en Miller (1997: 276).

siquiera se acercara un poco a esa absoluta perfección que el determinismo físico le atribuía” (Popper en Miller, 1997: 266).

La indeterminación está presente como un juego azaroso donde el resultado final no está completamente determinado y existe una gran diversidad de opciones o senderos por seguir. En contrapartida, el individuo, visto como una cosa social, podría estar predeterminado en grado tal que pudiese ser cuestionada su legítima libertad dentro del universo. Puesto que se deja paso al destino y no al libre albedrío. En este sentido, los fenómenos sociales se componen de individuos que no siguen un destino paupérrimo o abundante prefijado, sino que actúan bajo libre albedrío, incluso cuando en las dotaciones de recursos iniciales sean menos afortunados unos que otros.

Ello refleja, sin lugar a duda, que un individuo predeterminado sólo cumpliría con un patrón de pautas para las cuales fue programado, y que no podría ejecutar una acción fuera de los confines de lo establecido. Condición que si fuese cierta, entonces, conducirá a la determinación de causas cognoscibles y medibles que enmarcan los comportamientos, y con ello, el sistema social pudiese ser determinado en su totalidad, en este sentido, la evolución de los fenómenos sociales pudiesen ser determinados con exactitud y no con un cierto grado de probabilidad, como se muestra aquí.

Puesto que se puede sugerir que en el mundo social, es posible establecer probabilísticamente algunas causas y dejar de lado el estudio de otras. Al contar con un individuo que tuviese el conocimiento total sobre las cosas y la relación causal entre estas, entonces este individuo podría resolver, necesariamente, cualesquier dificultad en el mundo. Lo cual no ha sido posible hasta ahora, dado que la evidencia es contundente al respecto: los principales problemas emanados de los fenómenos sociales no se han resuelto: la miseria, la insalubridad y el deterioro medioambiental del planeta.

El indeterminismo social, es sólo una explicación de la evolución de las interacciones entre los individuos de una colectividad. Esto implica que cada acontecimiento social observable y, presumiblemente medible, tiene una causa social observable y probablemente mensurable, lo cual es compatible con el indeterminismo en el sentido de que ninguna métrica puede ser infinitamente precisa.

Ello refleja la clara oposición respecto de la idea sobre que el mundo social es un autómata y que los individuos son subautómatas predeterminados para el cumplimiento de los esquemas deterministas. Por ello, la predictibilidad está sujeta a márgenes de movilidad en la medición que conducen al reajuste de los modelos empleados para tal fin. Puesto que todo modelo, aun cuando tenga un origen meramente teórico, depende de la estructura del mundo empírico para su falsación, resaltando con ello que toda orientación de este tipo no considera la existencia de una capacidad de predecir con certeza en el mundo de las acciones de los individuos. Lo que existe es una suerte de tendencia de conocimientos de las probables acciones de los individuos, debido a que bien “sabemos que nuestras nubes no son efecto del azar perfecto” (Popper en Miller, 1997: 280).

Lo anterior revela que tampoco el indeterminismo puro ofrece algo, puesto que es necesario establecer nociones las cuales contengan un cierto grado de probabilidad de ocurrir; tanto para nuestras predicciones como para las retrodicciones. Esto es, se requiere de soportar un determinismo incompleto o con cierto grado de indeterminismo para las proyecciones a ejecutar para la identificación y conocimiento incompleto de los fenómenos sociales, en consecuencia, el panorama es la alta sensibilidad de las condiciones iniciales a la transformación de los resultados bajo un esquema de sistemas dinámicos complejos.

2. Sistemas dinámicos complejos

La estructura de un modelo general no lineal, del cual se puedan extraer deducciones prácticas para su uso en esquemas empíricos, requiere de una escala de planteamientos a seguir. En primer lugar, para el manejo de los sistemas no lineales se establecen sus procesos de gestación, los cuales corresponden con la identificación y resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales mediante un método pertinente, que brinde cuenta del fenómeno en particular. Esto implica una revisión general a los métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales (Fernández, 1999).[3] Condición que permite el análisis del sistema ante el cual se encuentra, puesto que el sistema no lineal de referencia pudiese ser un sistema caótico o simplemente dinámico pero no caótico.

En suma, el estudiar los fenómenos sociales con base en la distribución de sus atributos para individuos en general o referidos a un espacio o territorio en particular, provee la posibilidad de argumentar si estos tienden a estabilizarse o a hacerse caóticos. Ello indicará si el sistema en un futuro se transforma mejorando, manteniendo constante o empeorando la situación de los residentes. Asimismo, se establece la posibilidad de generar un pronóstico probabilístico de la situación de los fenómenos.

Determinar el grado caótico de un sistema permite conocer la plausibilidad de determinar si dentro de la heterogeneidad u homogeneidad de las condiciones de vida de los individuos existen ciertos patrones particulares, lo cual implica una identificación de pautas socioeconómico-político-espaciales.

Para ello, se requiere apuntar sobre los distintos patrones de atracción o repulsión de los parámetros o variables a considerar para los fenómenos sociales,

[3] Al respecto véanse Zill (1988) y Spiegel (1983).

que permitan visualizar las dimensiones de la incerteza o de la certeza asintótica según sea el caso.

2.1 Atractores

La formación de un atractor corresponde con el hecho de que los objetos identificados se agrupen en un espacio determinado con una presente dispersión. Así, dados $V \subset \mathbb{R}^n$ y F: V $\rightarrow \mathbb{R}^n$, n = 1,2,3, y $A \subset V$. Entonces A es un atractor de F sujeto a las siguientes condiciones:

1) A es un subconjunto cerrado e invariante[4] de V.
2) Existe una vecindad U de A tal que cada vez que v está en U, entonces $F^{(k)}(v) \rightarrow A$; en el sentido de que para cada $\varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{Z}$, y si $k \geq N$, entonces $\exists\, w_k \in A \mid \left| \left\| F^{(k)}(v) - w_k \right\| \right| < \varepsilon$.

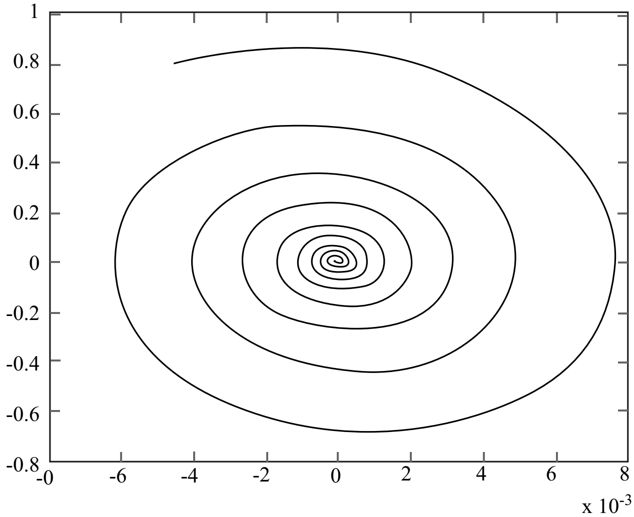
Los atractores, como su nombre lo indica, son una representación de las condiciones tendenciales y de variación, sin salir de un rango de evolución y que se gesta como resultado del patrón que tienen los parámetros de determinadas ecuaciones que permiten su existencia.

Estos pueden ser atractores no caóticos o caóticos, estos últimos también son conocidos como atractores extraños. Dentro de los no caóticos se encuentran aquellos cuya tendencia coincide con un punto fijo o una zona fija de atracción sin variación en su esquema tendencial o de evolución estadística. La cual, se determina con una alta probabilidad, en tal grado que experimentan trayectorias deterministas, siendo sencillo su pronóstico. Esto implica que este tipo de atractores, debido a su estructura, sea predecible su evolución con un alto grado de certeza que bien pudiese no ser una certeza absoluta, por ello también se les conoce como atractores simples.

En este sentido, los atractores simples (véanse esquemas 1 y 2) son una forma particular de determinación de los comportamientos dinámicos de las estructuras espacio-temporales, los cuales bajo ciertas características pudiesen corresponder con factores relativos a la precariedad y crecimiento de las ciudades. Esto es, se relacionan con factores como las condiciones de vida de una población en el entendido de que el progreso social necesariamente implica una mejora en las condiciones de vida de la población.

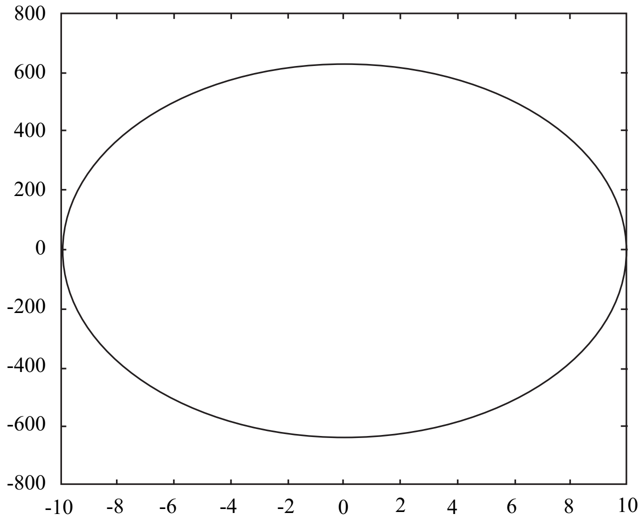
[4] La invarianza significa que las iteraciones de cualquier punto en A se encuentran también en V.

Esquema 1
Atractor de punto fijo



Fuente: Romanelli (2006: Figura 1).

Esquema 2
Atractor de ciclo límite



Fuente: Romanelli (2006: Figura 2).

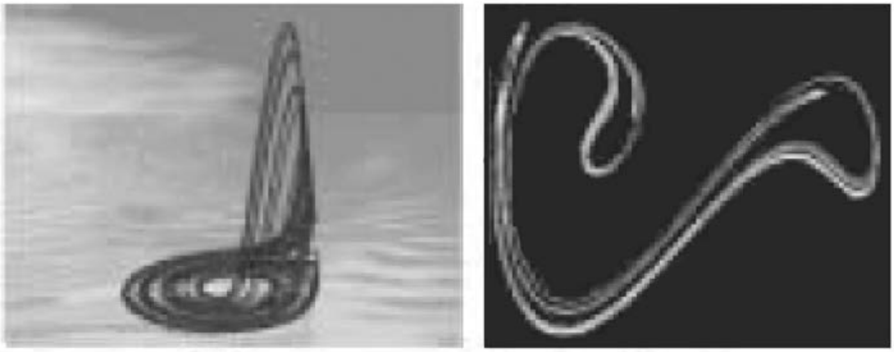
Este esquema de atractores simples puede ser aplicado a los fenómenos espaciales y no dista de que ante pequeñas variaciones en las condiciones de los individuos o de fenómenos sociales colectivos, se registre un aumento o disminución desmesurada de individuos que eligen satisfacer una determinada necesidad o algún interés en particular. Así, queda establecido que el tipo de atractor simple puede dividirse en dos:

> 1) *el punto atractor*, que corresponde a un estado estacionario del sistema, nada ocurre al transcurrir el tiempo; 2) el atractor *de ciclo límite*, que indica un comportamiento periódico, lo que implica, además, que, si bien el sistema es dispersivo y, por lo tanto, va perdiendo su energía, ésta se va reponiendo por la entrega de energía de alguna fuente exterior (Sametband, 1999: 60).

Estas dos clases de atractor son de estructura simple y pueden ser representados a través de curvas cerradas como se muestra en los esquemas 1 y 2. Lo anterior es interesante cada vez que pudiesen ser establecidas ecuaciones que representen estos sistemas con un grado de complejidad relativamente bajo. Sin embargo, la mayor parte de los fenómenos sociales vinculados con el territorio o las incidencias del individuo en el espacio no corresponden con estas condiciones. Empero, cabe destacar que si se pretende transitar de una situación caótica a una ordenada o con cierto tipo de orden, el camino es que se establezca una transformación de la primer situación a la segunda contemplando la existencia de entropía, es decir, la traducción de un sistema a otro no es uno a uno.

Una gran parte de los fenómenos sociales operan bajo patrones con un alto grado de complejidad, lo cual implica que su dinámica requiere de sistemas que tiene que ver más con los atractores de tipo extraño (véanse esquemas 3 y 4). Los atractores extraños o meramente caóticos, corresponden con los sistemas que tienden a ser altamente irregulares, cabe destacar que el nombre de "atractor extraño le fue dado por D. Ruelle y F. Tankes" (Cambel, 1999: 70), dentro de los atractores extraños o atractores caóticos representativos de este tipo de soluciones matemáticas se tiene el clásico atractor de Lorenz (véase Esquema 4).

Esquema 3
Atractor extraño de los tipos Duffing y Rössler



Fuente: Romanelli (2006: Figura 4).

Esquema 4
Atractor extraño del tipo Lorenz

Fuente: Romanelli (2006: Figura 6).

Estos atractores por las condiciones de su estructura presentan una opción de mayor vialidad para la identificación de evolución de los fenómenos sociales espaciales, pues contemplan la no existencia de un periodo preciso de transcurso de las trayectorias. Con ello en mente, se requiere presentar muy brevemente el algoritmo de solución para los sistemas dinámicos complejos.

2.2 Breviario sobre la solución de sistemas dinámicos complejos

Para el manejo de los sistemas no lineales caóticos es necesario establecer sus condiciones de evolución, lo cual corresponde con una revisión general a las ecuaciones diferenciales no lineales (Fernández, 1999).[5] Esto en parte permite el análisis de los sistemas caóticos, cuyo comportamiento irregular es resultado de su no linealidad.

La resolución de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden y primer grado obtiene su no linealidad de contener un producto de y con dy/dt o si se eleva a una potencia más alta que la unidad. Así, los dos tipos de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, las cuales pueden resolverse por procesos directos de integración, son aquellos donde las variables se separan y las ecuaciones son exactas.

A lo anterior hay que agregar dos tipos más, el tercero corresponde con la plausibilidad de reducir a ecuaciones exactas mediante factores de integrantes. El siguiente tipo consiste en un cambio de variable para simplificar la ecuación diferencial y hacer posible su solución, al cual se le conoce como ecuaciones homogéneas.

Tipo 1

Sea la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{dy}{dt} = h(y, t)$$

o también:

$$f(y, t)\, dy + g\,(y, t)dt = 0$$

Si la ecuación posee la propiedad de que f sólo dependa de y y la g lo sea únicamente de t, entonces la ecuación quedaría como sigue:

$$f(y)dy + g(t)dt = 0$$

[5] Es sabido que los procedimientos son variados para la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales, pero aquí sólo se resaltan cinco tipos, es decir, la propuesta no es exhaustiva. Para una consulta de mayor extensión sobre los tipos excluidos véanse Zill (1988 y 2007) y Spiegel (1983).

La cual puede resolverse con las técnicas habituales de integración. Cuando esto sucede se dice que la ecuación diferencial es de variables separables.

Tipo 2

Partiendo de una función $F(y, t)$, sabemos que su diferencial total es:

$$dF(y, t) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) dt$$

Sustituyendo las derivadas parciales por M y N respectivamente se obtiene:

$$dF(y, t) = Mdy + Ndt$$

Igualando con cero la diferencial:

$$Mdy + Ndt = 0$$

Esta última recibe el nombre de ecuación diferencial exacta. Ahora según puede establecerse que $\partial^2F/\partial t\partial y = \partial^2F/\partial y\partial t$ entonces puede establecerse que la ecuación diferencial es exacta si y sólo si $\partial M/\partial t = \partial N/\partial y$, lo cual constituye un criterio para corroborar la exactitud de una ecuación diferencial. El siguiente paso corresponde con integrar M parcialmente con respecto a y y añadiendo una función $Z(t)$:

$$F(y, t) = \int M\partial y + Z(t)$$

Posteriormente derivando $\partial F/\partial t$ con respecto a t y dado que $N = \partial F/\partial t$, se igualan los resultados. Por ende, se obtiene el valor para $Z'(t)$, el cual se integra. Este valor finalmente se sustituye y ofrece la solución buscada para $F(y, t)$.

Tipo 3

En ocasiones las ecuaciones diferenciales no lineales no cumplen el requisito que garantice su exactitud, pero pueden convertirse en exactas mediante un factor de integración.

Así, suponiendo que $\partial M/\partial t \neq \partial N/\partial y$, se trata de encontrar la regla o reglas que nos permitan encontrar dichos factores de integración. Retomando la simbología del tipo 2 se tienen las dos reglas siguientes:

$$\text{si } f(y) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) \Rightarrow e^{\int f(y)dy} \quad \text{es el factor de integración}$$

$$\text{si } g(y) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial t}\right) \Rightarrow e^{\int g(t)dt} \quad \text{es el factor de integración}$$

En este caso se obtiene el factor de integración y se multiplica por este y se verifica que es exacta.

Tipo 4-Ecuaciones homogéneas

Esta clase de ecuaciones también se resuelven por medio de un cambio de variable. Así, partiendo de la ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$, se dice que esta ecuación es homogénea, siempre que la función f no dependa de x y y separadamente, sino tan sólo de sus razones o cocientes y/x o x/y, por lo cual quedaría como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right)$$

A su vez una ecuación homogénea puede simplificarse, haciendo $v = y/x$ –por tanto, vx = y– la ecuación se transforma en $dy/dx = F(v)$, y considerando $v = f(x)$ se tiene $dy/dx = x(dv/dx) + v$, con ello, la ecuación se transforma en $x(dv/dx) + v = F(v)$.

De la última expresión, al separar las variables $dx/x = dv/(F(v) - v)$ es posible encontrar la solución de la ecuación diferencial, la cual una vez resuelta sólo resta sustituir v por y/x.

Tipo 5-Ecuación de Riccati

Es una ecuación diferencial no lineal de primer orden constituida de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 f(x) + yg(x) + h(x)$$

Para la que es necesario encontrar una integral de la forma $y = y_1 + (1/Z)$ teniendo que determinar la función Z, y partiendo de que se conoce una integral particular y_1 de la ecuación original, si Z existe, verifica la ecuación y:

$$y^1 - \frac{Z'}{Z^2} = \left(y_1^2 + \frac{1}{Z^2} + \frac{2y_1}{Z}\right) f(x) + \left(y_1 + \frac{1}{Z}\right) g(x) + h(x)$$

Dado que y_1 es una integral particular de la ecuación original, entonces:

$$-\frac{Z'}{Z^2} = \left(\frac{1}{Z^2} + \frac{2y_1}{Z}\right) f(x) + \left(\frac{1}{Z}\right) g\,(x)$$

o también:

$$Z' + [2y_1 f(x) + g(x)]\, Z = -f(x)$$

Esta última expresión es una ecuación lineal de primer orden que permite determinar la función desconocida Z, y por consiguiente, la integral general de la ecuación diferencial original.

Una vez observados estos procedimientos se recurre a la determinación de las nociones teóricas y empíricas de la estabilidad e inestabilidad de los sistemas, que trae consigo el conocido exponente de Lyapunov.

3. El nacimiento del caos

La idea sobre la existencia de caos data desde la época de los griegos, quienes sostenían que el caos era la ausencia de todo orden. En la teoría matemática del caos esto no opera del todo de esta manera, puesto que se considera un tipo de caos en donde sí es posible la identificación de comportamientos o patrones de la información analizada. En muchos de los casos este caos es conocido como determinismo asintótico, que no es del todo indeterminista ni del todo determinista, es decir, es posible establecer condiciones de mesurabilidad en los sistemas caóticos y nos guían en nuestro esquema de certeza asintótica o de relativamente verdadero.

3.1 Estabilidad, inestabilidad y el exponente de Lyapunov

3.1.1 El teorema de estabilidad de Lyapunov

La teoría de la estabilidad es en extremo relevante cuando se trata de identificar sistemas que en principio son estables pero que con el paso del tiempo se vuelven inestables o caóticos, o sistemas que desde un inicio dan muestras de un comportamiento caótico. Ello permite el estudio e identificación de sistemas estables e inestables, asimismo abre las puertas a la enunciación posterior del control de sistemas caóticos. En sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad, no obstante, sólo atenderemos a los dilemas de estabilidad de los puntos de equilibrio.

La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov,[6] donde un punto de equilibrio (PE) se dice estable si todas las soluciones que se inicien en sus cercanías permanecen en una vecindad del PE; de otro modo el PE es inestable. Así, un PE se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del PE no sólo permanecen en su vecindad, sino además tienden hacia el equilibrio en la medida que el tiempo se aproxima a infinito. Cabe destacar que los teoremas de estabilidad de Lyapunov ofrecen condiciones suficientes para la estabilidad de los PE.

3.1.2 Teorema de estabilidad de Lyapunov

Consideremos el sistema estacionario:

$$x' = f(x) \tag{1}$$

Donde:

$f\colon D \to \mathbb{R}^n$ y $D \subset \mathbb{R}^n$.

Supongamos que $x'' \in D$ es un PE de (1), es decir $f(x'') = 0$, vamos a caracterizar y estudiar la estabilidad de x''. Por conveniencia, vamos a asumir que $x'' = 0$, esto implica la pérdida de generalidad porque en caso contrario definimos $y = x - x''$ y trabajamos con la ecuación $y' = g(y)$, $g(y) = f(y + x'')$, la cual tiene un equilibrio en el origen.

Definición 1
El PE $x = 0$ de (1) es:

a) Estable si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(0) \mid \| x(0) \| < \delta \Rightarrow \| x(t) \| < \varepsilon\ \forall\ t \geq 0$;
b) Inestable si no es estable; o
c) Asintóticamente estable (AE) si es estable y δ puede elegirse tal que $\| x(0) \| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

[6] Aleksandr Lyapunov (1857-1918), matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre.

Esta definición tiene como condición implícita la existencia de la solución para todo $t \geq 0$. Sin embargo, esta propiedad de existencia global (en el tiempo) de la solución no está garantizada, puesto que se requieren condiciones adicionales en el teorema de Lyapunov que van a garantizar la existencia global (en el tiempo) de la solución.

Ahora, es posible determinar la estabilidad en el PE mediante funciones, para ello, se considera que $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene el origen. La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (1) está dada por:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x_i} f(x) \qquad (2)$$

La enunciación de V permite establecer el primer teorema.

Teorema 1 (Lyapunov)

Sea el origen $x = 0 \in D$ PE de (1), $D \subset \mathbb{R}^n$, y $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \qquad (3)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D \qquad (4)$$

entonces $x = 0$ es estable. Más aún, si:

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D - \{0\} \qquad (5)$$

entonces $x = 0$ es AE.

Demostración

Dado $\varepsilon > 0$, elijamos $r \in (0,\varepsilon] \, \big| B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\} \subset D$.

Sea $\alpha = \min_{\|x\| = r} V(x)$, entonces $\alpha > 0$ por (2).

Tomemos $\beta \in (0,\alpha)$ y sea $\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid V(x) \leq \beta\}$, entonces Ω_β se encuentra en el interior de B_r (véase Esquema 5).

El conjunto Ω_β tiene como propiedad que toda trayectoria la cual parte de $t = 0$ permanece en Ω_β $\forall\ t \geq 0$, ello sigue de (4) ya que:

$\dot{V}\ (x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta\ \forall\ t \geq 0.$

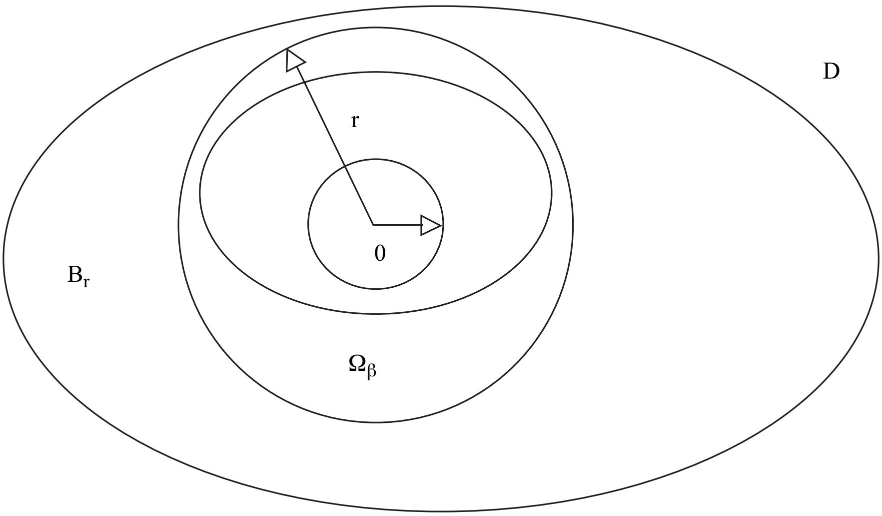
Dado que Ω_β es un conjunto compacto (cerrado por definición y acotado porque se encuentra contenido en B_r), se concluye que (1) tiene una solución única definida para todo $t \geq 0$ cuando $x(0) \in \Omega_\beta$.

Como V es continua y $V(0) = 0$, $\exists\ \delta > 0 \mid \|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta$, entonces $B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$ y $x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r$, $\forall\ t \geq 0$.

Por lo tanto, $\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon\ \forall\ t \geq 0$, lo cual muestra que el PE en $x = 0$ es estable.

Supongamos ahora que (5) también vale. Para mostrar EA debemos probar que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En virtud de que V es continua y $V(0) = 0$ es suficiente mostrar que $V(x(t)) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Dado que $V(x(t))$ es monótonamente decreciente y acotada inferiormente por cero, $V(x(t)) \rightarrow c \geq 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Esquema 5
Representación de los conjuntos de la demostración



Fuente: Elaboración propia con base en Seron (2000).

Mostramos que $c = 0$ por contradicción. Supongamos que $c > 0$, por continuidad de $V \exists\, d > 0 \mid B_d \subset \Omega_c$. El límite $V(x(t)) \rightarrow c \geq 0$ implica que la trayectoria $x(t)$ permanece fuera de la bola $B_d\ \forall\ t \geq 0$.

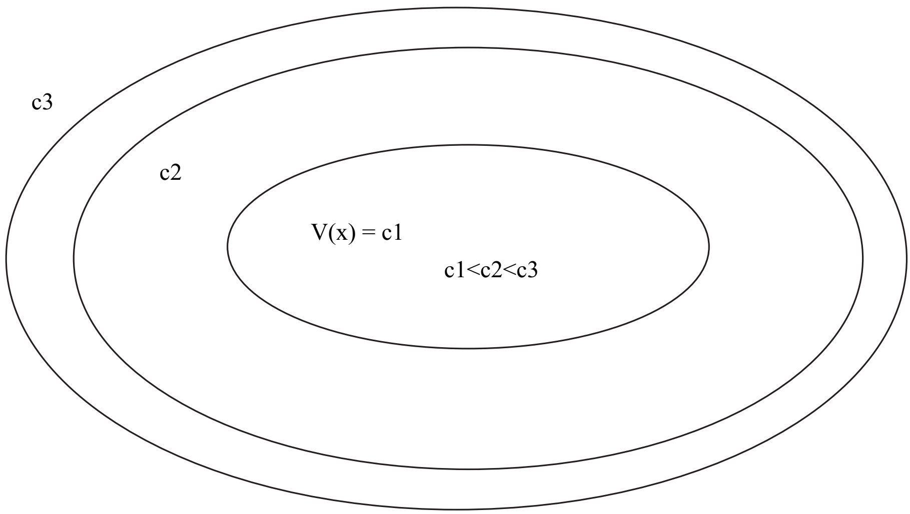
Sea $-\gamma = \text{máx}_{d \leq \|x\| \leq r}\ \dot{V}(x)$, el cual existe porque la función continua $\dot{V}(x)$ alcanza un máximo sobre el conjunto compacto $\{d \leq \|x\| \leq r\}$, además por (5) sabemos que $-\gamma < 0$. Al integrar $\dot{V}(x)$ se tiene que:

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau))d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t$$

Por último, el lado derecho se va a hacer negativo después de un cierto tiempo, la desigualdad contradice la suposición de que $c > 0$.□

En este sentido, una función continuamente diferenciable que satisface (3) y (4) se denomina función de Lyapunov. La superficie $V(x) = c$ se denomina superficie de Lyapunov o superficie de nivel. Usando superficies de Lyapunov (véase Esquema 6 el cual ofrece una interpretación intuitiva del Teorema 1), la condición $\dot{V} \leq 0$ implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se introduce en el conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$ y nunca puede salir de él.

Esquema 6
Curvas de nivel de una función de Lyapumov



Fuente: Elaboración propia con base en Seron (2000).

Cuando $\dot{V} < 0$ la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra interior con un c menor. En la medida que c decrece, la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se reduce hasta transformarse en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando $t \to \infty$. Si sólo sabemos que $\dot{V} < 0$, no es posible asegurar que la trayectoria tienda al origen, sin embargo, podemos concluir que el origen es estable porque la trayectoria puede ser encerrada en cualquier bola B^{ε} sólo requiriendo que el estado inicial $x(0)$ pertenezca a una superficie de Lyapunov contenida en dicha bola.

Una función $V(x)$ que satisface (3) se dice definida positiva si satisface la condición más débil $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$; se dice semidefinida positiva; se dice definida negativa o semidefinida negativa si $-V(x)$ es definida positiva o semidefinida positiva, respectivamente. Cuando $V(x)$ no tiene signo definido con respecto a alguno de estos cuatro casos se dice indefinida. El teorema de Lyapunov se puede enunciar usando esta nueva terminología como: el origen es estable si existe una función definida positiva y continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa, y es AE si $\dot{V}(x)$ es definida negativa.

3.1.3 Cuestiones sobre la región de atracción: estabilidad asintótica global (EAG)

Sea $\phi(t; x)$ la solución de (1) que comienza en $t = 0$ y supongamos que el origen $x = 0$ es un PE y AE. Definimos como región (dominio) de atracción (RA) del PE al conjunto $\left\{x \middle| \lim_{t\to\infty} \phi(t;x)=0\right\}$. En general es difícil o imposible encontrar analíticamente la RA, sin embargo, se pueden emplear funciones de Lyapunov para estimarla en conjuntos contenidos en la RA. Por la prueba del Teorema 1 sabemos que existe una función de Lyapunov la cual satisface las condiciones de estabilidad asintótica en un dominio D, y si $\Omega_c = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| V(x) \leq c\right\}$ se encuentra acotado y contenido en D, entonces toda trayectoria que inicia en Ω_c permanece en Ω_c y tiende al origen cuando $t\to\infty$; por lo tanto, Ω_c es una estimación de la RA. Esta aproximación puede ser conservadora, es decir, puede ser mucho más chica que la RA real.

Queremos saber bajo qué condiciones la RA es todo el espacio $\mathbb{R}^n$. Esto será así si podemos probar que para todo estado inicial x, la trayectoria $\phi(t; x)$ tiende al origen cuando $t\to\infty$, sin importar cuán grande es $\|x\|$. Si un PE-AE tiene esta propiedad se dice que es EAG. Recordando otra vez la prueba del Teorema 1 vemos que se puede probar EAG si se puede asegurar que cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ puede incluirse en el interior de un conjunto acotado Ω_c. Esto no siempre va a ser posible porque para valores grandes de c el conjunto Ω_c puede no ser acotado. Para ello, veamos el siguiente teorema.

Teorema 2 (Barbashin-Krasovskii)

Sean $x = 0$ un PE de (1) y V: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \; \forall \; x \neq 0 \tag{6}$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \text{ cuando } V(x) \rightarrow \infty \tag{7}$$

$$\dot{V}(x) < 0 \; \forall \; x \neq 0 \tag{8}$$

entonces $x = 0$ es EAG.

Demostración

Dado cualquier punto $p \in \mathbb{R}^n$, sea $c = V(p)$. La condición (7) implica que para cualquier $c \geq 0 \; \exists \; r > 0 \big| V(x) > c$ cuando $\|x\| > r$, por lo tanto $\Omega_c \subset B_r$ lo cual implica que Ω_c es acotado. El resto de la prueba es similar al Teorema 1. □

3.1.5 Inestabilidad

Vamos a ver un teorema que prueba que un PE es inestable. Sea V: $D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen $x = 0$. Supongamos que $V(0) = 0$ y que hay un punto x_0 arbitrariamente cercano al origen tal que $V(x_0)> 0$. Elijamos $\mathrm{r} > 0 \mid B_r = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n\!: \|x\| \leq \mathrm{r}\} \subset D$ y sea:

$$U = \{x \in B_r \,|\, V(x) > 0\} \tag{9}$$

El conjunto U es no vacío y su frontera está dada por la superficie $V(x) = 0$ y la esfera $\|x\| < r$. Dado que $V(0) = 0$, el origen se encuentra sobre la frontera de U en el interior de B_r.

Teorema 3 (Chetaev)

Sean $x = 0$ un PE de (1) y $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $V(0) = 0$ y $V(x_0) > 0$ para algún x_0 con $\|x_0\|$ arbitrariamente pequeña. Definamos el conjunto U como en (9) y supongamos que $\dot{V}(x) > 0$ en U. Entonces $x = 0$ es inestable.

Demostración

El punto x_0 está en el interior de U y $V(x_0) = a > 0$. La trayectoria $x(t)$ que comienza en $x(0) = x_0$ debe dejar el conjunto U. Para probar esto, notemos que mientras $x(t)$ permanezca en U, $V(x(t)) \geq a$ porque $\dot{V}(x) > 0$ en U. Sea
$\psi = \text{mín}\,\{\dot{V}(x) \mid x \in U \wedge V(x) \geq a\}$ que existe porque la función continua $\dot{V}(x)$ tiene un mínimo en el conjunto compacto $\{\dot{V}(x) \mid x \in U \wedge V(x) \geq a\} = \{x \in B_r \mid V(x) \geq a\}$. Entonces $\psi > 0$ y:

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s))ds \geq a + \psi t$$

Esta desigualdad muestra que $x(t)$ no se puede quedar indefinidamente en U porque $V(x)$ está acotada en U. Ahora, $x(t)$ no puede dejar U a través de la superficie $V(x) = 0$ porque $V(x(t)) \geq a$, por lo tanto debe hacerlo a través de la esfera $\|x\| \geq a$. Como esto ocurre para $\|x_0\|$ arbitrariamente pequeña, el origen es inestable.

3.6 Aplicación a asentamientos irregulares de la delegación de Milpa Alta del DF

Es posible observar que las condiciones espaciales caóticas permiten configurar la existencia de atractores simples, extraños o ambos a lo largo del territorio, esto ocurre cada vez que exista una segregación socio-espacial. Ello puede ser constatado mediante la evaluación del grado de caos del sistema en estudio.

Así, la evaluación del tipo de atractor para las condiciones de vida de la población que habita en los asentamientos humanos irregulares, puede establecerse por medio de la determinación de si es un sistema que puede evaluarse como un atractor simple o extraño, es decir, si es caótico o no propiamente dicho para las condiciones de vida de la población en los asentamientos humanos irregulares de la delegación Milpa Alta.

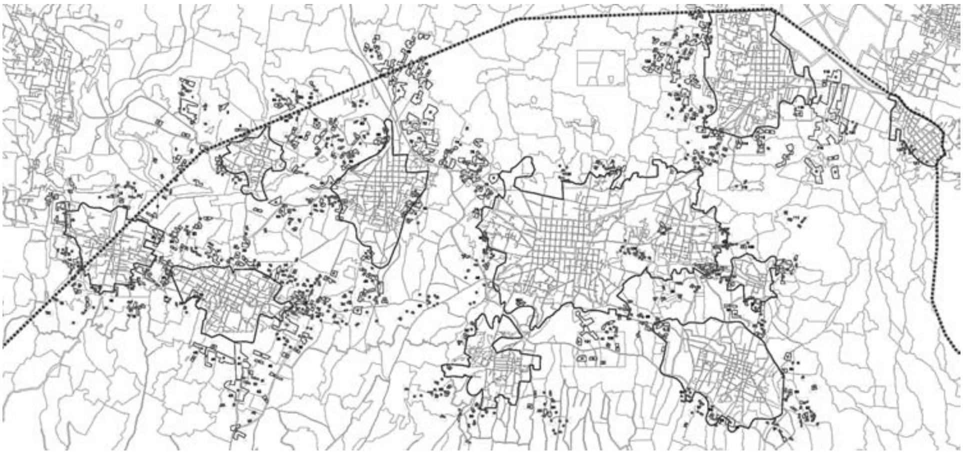
La indagación corresponde con la evaluación de la función que determina tal sistema mediante el exponente de Lyapunov, el cual opera bajo un esquema bivalente, de tal suerte que si el exponente resulta ser positivo la situación que experimenta el sistema es caótica; por el contrario, si es negativo el sistema está representado por un atractor simple: de ciclo límite o de punto fijo. La estimación del exponente de Lyapunov corresponde con:

$$\lambda = \underset{N\to\infty}{lím} \frac{1}{N} \log|f'(x_i)|$$

En nuestro caso se tiene que para todos los asentamientos comparables de esta delegación, el sistema no muestra una tendencia al caos puesto que tiende a la estabilidad con un exponente de Lyapunov de -0.32947941; para una función cúbica igual con $f(x) = -0.145 + 0.552x + 0.1667x^2 - 0.042x^3$. Esto es respuesta de la existencia de convergencia en la distribución de las condiciones desfavorables a favorables de la población de los asentamientos humanos irregulares en Milpa Alta.

Ahora, en el caso de la denotación del modelo general de evolución de los asentamientos humanos irregulares, se tiene que tal sistema tiene un comportamiento caótico, dado por su propia distribución espacial arbitraria (véase Mapa 1).

Mapa 1
Distribución de los asentamientos humanos irregulares en Milpa Alta, 2005 (representados por los puntos dispersos)



Fuente: Adecuación propia con base en UNAM (2009).

Así que en este caso el procedimiento consiste en establecer una ecuación que permita mantener la sensibilidad a las condiciones iniciales como un sistema caótico, pero que sea capaz de establecer una proximidad tendencial con una probabilidad lo suficientemente alta para establecer una predicción sobre este sistema. Para ello se procede a utilizar una variante de un sistema de ecuaciones de 2x2, para con el resultado establecer un ciclo que lleve a cada asentamiento a un punto asintóticamente fijo o de una relativamente certeza, el cual identificamos como punto de saturación del espacio o territorio inmediatamente aledaño a las viviendas base consideradas en el Mapa 1.

4. Modelo uniecuacional de saturación para los asentamientos irregulares

Se procede ahora al empleo del modelo uniecuacional de saturación para los asentamientos humanos irregulares. Este se construyó con base en la determinación de un sistema dinámico complejo que ofrece como resultante una tendencia a la formación de un atractor asintótico de punto fijo, el cual, como se mencionó en la parte teórica sobre estabilidad e inestabilidad, en su tendencia asintótica es estable y, por ende, relativamente verdadero.

Parte significativamente importante del modelo es que se tomó en consideración la inclusión de variables accesibles a bajo costo, pues al menos se requiere de la evaluación o un levantamiento de la información en dos periodos de tiempo, pudiendo, por supuesto, ser muchos más. En este caso, los censos proveen de las variables de población y vivienda en los asentamientos humanos irregulares. Si no se cuenta con estos datos de manera oficial, fácilmente se puede recurrir a la realización de un levantamiento de la información, en el entendido de que este proceso es sumamente rápido, accesible para tener una respuesta certera y a bajo costo.

Con ello en mente, se estableció que el modelo de saturación uniecuacional para los asentamientos humanos irregulares (MOSUE)[7] es el siguiente:

$$\begin{aligned} s = \ & \left| e^{-(u-(\text{mín}\{u+k\}))0.1t} \left(\text{sen}(v - \text{mín}\{u+k\})0.1t\right) \right| \\ + & \left| e^{-(u-(\text{mín}\{u+k\}))0.1t} \left(\text{sen}(v - \text{mín}\{u+k\})0.1t\right) \right| \end{aligned}$$

Donde:

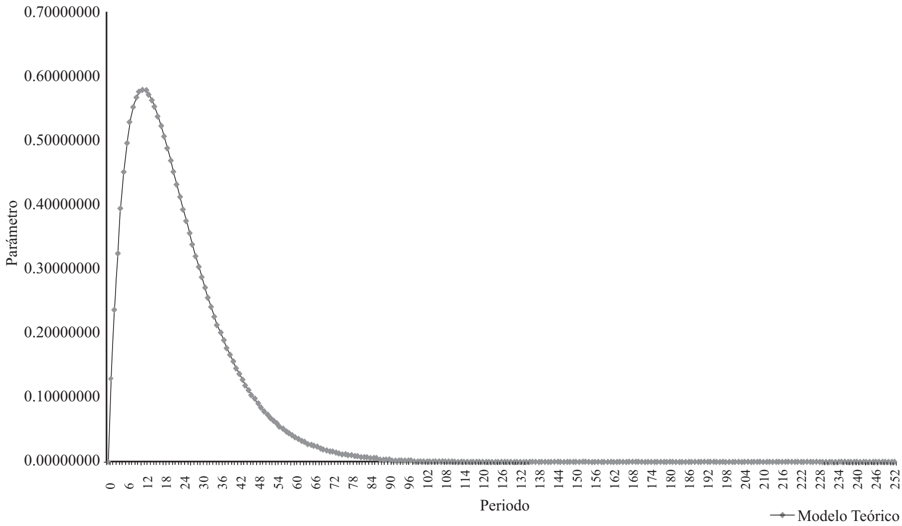
S = Saturación;
u = variable 1;
v = variable 2; y
t = tiempo.

De esta manera, para un modelo teórico con valores de las variables iguales con cero se observa la generación de una curva que crece paulatinamente hasta llegar al punto de saturación (véase Gráfica 1), punto que se relaciona con el

[7] Esta ecuación es una variación realizada a partir de un sistema de 2x2. Ello tiene implicaciones contra argumentaciones sobre su origen ya que el resultado es la existencia de dos ecuaciones para la determinación de un sistema atractor de punto fijo, sin embargo, para las cuestiones que competen a este escrito basta con mostrar los resultados obtenidos para esta ecuación.

tiempo cuando el territorio aledaño a cada asentamiento irregular será ocupado, y que de igual manera no es un punto estable (Prigogine y Stengers, 1992).

Gráfica 1
Modelo teórico de saturación



Fuente: Elaboración propia.

También se observa una tendencia asintótica al final de la curva, una muestra de esta tendencia corresponde con el hecho de que para un valor no representado, en 1,700 años, es decir para el año 3710, el valor del parámetro es sumamente pequeño pero no cero: 1.1843 x 10^{-64}. Esto indica que la ecuación genera resultados asintóticos donde $\text{lím}_{t\to\infty} S(u, v, t) = 0$.

Lo anterior nos indica teóricamente que bajo esas condiciones la trayectoria es asintóticamente estable, por tanto sólo relativamente certera. Una vez establecido el modelo y representado gráficamente, es necesario falsarlo en torno a los datos empíricos con que se cuenta sobre los asentamientos humanos irregulares de Milpa Alta. Es decir, se requiere evaluar su factibilidad para la explicación de los fenómenos sociales cotidianos. Claro es que este tipo de modelos propuestos surgen de un proceso donde continúan siendo no falsos hasta el momento en el cual se identifique un grupo de estadísticas que no permitan hacer pronóstico alguno o tiene límites externos en el momento cuando las predicciones probabilísticas dejen de ser no falsas, para pasar a formar parte de la no concordancia del modelo con la realidad.

Los resultados se representan entorno a la factibilidad probabilística de un intervalo, escrito en términos del mínimo y el máximo del año en el cual se saturarán los asentamientos humanos irregulares observados hasta el momento de la estadística (véase Cuadro 1). El planteamiento sobre el periodo mínimo y máximo de ocurrencia indica que no se pretende establecer un momento preciso o determinista de cumplimiento de la cuestión. Por el contrario, lo que se estima es la existencia de un rango de posibilidades dentro de las cuales se puede encontrar el asentamiento humano irregular en su punto máximo de saturación. Los valores van desde aquellos sitios en donde los valores mínimos ocurren en 2011 hasta valores superiores para 2050, esto se debe a que en los primeros la dinámica de los asentamientos irregulares es sumamente fuerte, y en los otros la dinámica implica valores decrecientes en principio para posteriormente comenzar a elevarse, lo cual lleva a que el proceso evolutivo de saturación se realice en un mayor periodo de tiempo.

Cuadro 1
Periodo de saturación de los asentamientos irregulares humanos de la Delegación Milpa Alta

Asentamiento	*Año de saturación*		*Asentamiento*	*Año de saturación*	
	Mínimo	*Máximo*		*Mínimo*	*Máximo*
Cazahuastitla	2016	2020	Zacaxontlicpa	2057	2061
Atoctienco (Camino a la mina)	2017	2021	Santa Catarina (Piedra blanca)	2018	2022
Totolan	2018	2022	Paraje Cuauhtetec	2013	2017
Xoctonco	2015	2019	Tetzmititla	2017	2021
Cozcatlan	2019	2023	Tlaxiomulco	2012	2016
Herradura, La (Séptima curva)	2025	2029	Tepachac	2019	2023
Hueycotzingo	2019	2023	Tecoloxtitla	2011	2015
Mora, La	2033	2037	Tapalaco	2011	2015
Metenco	2013	2017	Teacalco	2019	2023
Prolongación San Marcos	2017	2018	Conzontlicpa	2014	2018
San Marcos	2028	2032	Huepaltepec	2020	2024
Atlatlauco	2013	2017	Tecupilco (Km. 17.5)	2015	2019
Cuyucalco	2019	2023	Xaltepetitla	2012	2016
Iztauhagca	2022	2026	Tetecolok	2010	2014
Tlatepexco	2015	2019	Tlaxicoapa (Mulotla)	2012	2016
San Paocotitla	2017	2021	Santa Rosa	2020	2024
Tlalcocomoya	2012	2016	Prolongación Zaragoza	2011	2015
Mecatzintla	2016	2020	Playa Quieta	2033	2037

continúa…

Tetexipezco	2014	2018	Zapote, El (Prol. Lázaro Cárdenas Xochitepec)	2010	2014
Texcalahuitiel	2014	2018	Maxulco (Barrio Cruztitla)	2015	2019
Tezompa	2016	2020	Prolongación Belisario Domínguez (El pirul)	2019	2023
Colonia Teziuhtepec	2050	2054	Prolongación Avenida México norte	2012	2016
Tetzumpa	2025	2029	Zacuaztitla	2021	2025
Tlaxala	2015	2019	Omaxal	2208	2212
Tototepec	2013	2017	Ahuatitla (Prolongación Benito Juárez)	2031	2035
Cerrada Francisco I. Madero	2015	2019	Chichilecas	2015	2019
San José	2011	2015	Calle Capulines	2018	2022
Itzintlantepetl (Calle Bugambilias)	2010	2014	Rancho Los Capulines	2013	2017
Coximalipa	2017	2021	Prolongación Xolotl	2013	2017
Texacatipac	2013	2017	Meliaxco	2021	2025
Mora III, La	2029	2033	Prolongación Las cruces	2014	2018
Mora V, La	2077	2081	Cuapalipa	2036	2040
Coyocalli	2014	2018	Camino Tigustitla	2019	2023
Tlapalan	2012	2016	Zacaticli	2014	2018
Texalco	2012	2016	Tecpallo	2017	2021
Quepilco	2016	2020	Nuhuaca (Techinantitle)	2013	2017
Barranca 6 (Pozo 8 Camino a San Francisco)	2015	2019	Cuacuahotlipa	2015	2019
Teatlaco	2029	2033	Prolongación Niños Héroes	2012	2016
Tlaloxtoc (Ejidos de Tecoxpa)	2017	2021	Paraje Huicalco	2017	2021
Atuzanco	2016	2020	Tetexaloca	2021	2025
Jalisco uno	2028	2032	Prolongación Justo Sierra	2023	2027
San Lorenzo Tlacoyucan	2018	2022	Acatlaco	2040	2044
Rinconada del Tioca	2014	2018	Paraje Oluca	2012	2016
Temoclaluca	2017	2021	Camino Viejo a Santa Cruz	2019	2023
Coametzu	2019	2023	Paraje La Cruz (Camino a Tlatenami)	2016	2020
Cuauhtunco	2013	2017	Zacamoli	2024	2028
Tepetenco	2014	2018	Sin nombre	2014	2018
San Isidro Cuautepec	2014	2018	Tlaltepec	2009	2013
Xaluis (Ixtahuaca)	2015	2019	Palmas, Las	2015	2019
Tlacaxalt	2013	2017	AA Milpa Alta	2014	2018
Tlachachalipac	2016	2020	Huexcomatepec	2018	2022
Camino Real a Tlaltenami	2014	2018	Zozotlac	2015	2019
Mecalco	2022	2026	Atoctenco (Tlalaxco)	2013	2017
Carretera a Santa Ana	2020	2024	Tlacopanco	2014	2018
Prolongación Insurgentes (Xali)	2011	2015	Pitucaltitla	2156	2160

Fuente: Elaboración propia.

Una vez realizadas las estimaciones, es necesario abordar una cuestión más y es el asunto sobre la certeza asintótica y su plausible enunciación como una grado de veracidad que se distingue de la verdad y la falsedad, y al cual nos hemos referido como algo relativamente cierto y que puede adquirir una notación de relativamente verdadero, es decir, se establece que esa certeza asintótica que ofrece el modelo de saturación no es otra cosa que una referencia de verdad, como correspondencia con los hechos, multivalente: relativamente verdadero.

5. Breve comentario sobre lo relativamente verdadero

La idea de esta sección sólo es dejar en claro que todo proceso de derivación temporal necesariamente implica una entropía, condición que sustenta sólo probabilidades de argumentar sobre hechos asintóticamente certeros, pero no de una certeza absoluta. Esta certeza asintótica se encuentra presente en la mayor parte de los fenómenos sociales si y sólo si son procesos diacrónicos. Así, mientras no pueda con precisión estimarse la entropía, el sistema se torna incognoscible como una verdad absoluta, lo cual implica que nuestro conocimiento sobre las cosas y la relación entre las cosas sólo sea relativamente verdadero.

El procedimiento general para establecer una correspondencia entre una matriz de resultados y un cálculo lógico es el siguiente. Se consideran dos álgebras similares si son respectivamente $\langle B, \Delta \rangle$ y $\langle B, \Gamma \rangle$, $\Delta = \langle \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \rangle$ y $\Gamma \langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle$, para cada índice i $(1 \leq i \leq n)$, δ_i es una operación con igual dimensión de argumentos que γ_i, es decir, son operaciones con el mismo número de argumentos. Mediante ello se posibilita la transformación, en nuestro caso, de una serie de tres valores a un argumento lógico trivalente según su valor de verdad: verdad, falsedad y relativamente verdadero. De esta manera, nuestras certezas corresponden con el valor de verdad, la incerteza con falsedad y la certeza asintótica con el valor de relativamente verdadero.

En este caso consideramos que dicha lógica trivalente no implica un valor de verdad indeterminado, sino que siguiendo la explicación de la lógica *fuzzy*, es plausible que dicho valor de verdad corresponda con una valor relativamente verdadero. Esto conlleva a plantear que la propuesta de modelo elaborada, en el proceso de reducir la saturación de los asentamientos irregulares no conduce a un estadio de certeza absoluta, el proceso implica una pérdida o entropía relacionada con el hecho de que un proceso de reducir la saturación implica un proceso más lento en comparación con su saturación y que no termina por completarse totalmente.

Así, se establece que no existe un retorno integro al punto de partida, lo cual conduce a que el proceso caótico nos lleve a una situación donde no impera un orden absoluto, y sí un casi orden registrado como un punto de ocurrencia en cálculo lógico (de verdad como correspondencia con los hechos), de un relativamente verdadero.

Conclusiones

Las reflexiones finales corresponden con el hecho de que si bien en la búsqueda de una verdad absoluta, como correspondencia con los hechos, sólo es posible encontrar una categoría de relativamente verdadera, ello implica que la verdad con *V* para los fenómenos sociales sea únicamente una verdad con *v*. La plausibilidad de transitar de un caos aparentemente indeterminado a un sistema estable, bajo un esquema diacrónico, implica una entropía.

Estas condicionantes conducen a argumentar que el conocimiento de las cosas y la relación entre ellas con una certeza inamovible en los fenómenos sociales, es sólo el sueño de los deterministas mecanicistas. La vida de los individuo no es una cuestión de automatización, en el cual los participantes o sujetos son autómatas programables. Siempre existe opción para la no linealidad de su vida.

La característica compleja de la acción humana de obedecer a una multitud de factores entreverados y la inestabilidad de los sistemas donde se ejerce, nos conducen a modelos analíticos que nos ofrecen la certeza asintótica y sus respuestas de grados de verdad o falsedad.

Referencias bibliográficas

Abbagnano, Nicola (1954). *Filosofía de lo posible*, México: FCE.

Arrowsmith, D. and C. Place (1992). *Dynamical Systems: differential equations, maps and chaotic behaviour*, UK: Chapman and Hall.

Badiou, Alain (1978). *El concepto de modelo*, México: Siglo XXI.

Beck, Ulrich (1998). *La sociedad del riesgo*, España: Paidós, pp. 304.

Briggs, John y David Peat (1999). *Las siete leyes del caos*, España: Grijalbo.

——— (1994). *Espejo y reflejo: del caos al orden*, España: Gedisa.

Cambel, A. (2000). *Applied chaos theory*, USA: Academic Press.

Costa, Newton da (2000). *El conocimiento científico*, México: UNAM.

Davidson, Donald (2001). *De la verdad y de la interpretación*, España: Gedisa.

Ekeland, Ivar (2001). *El caos*, México: Siglo XXI.

Elster, Jon (2010). *La explicación del comportamiento social. Más tuercas y tornillos para las ciencias sociales*, México: Gedisa.

Estany, Anna (2001). *La fascinación por el saber: introducción a la teoría del conocimiento*, España: Crítica.

Fernández, Andrés (1999). *Dinámica caótica en economía*, España: Mc Graw Hill.

Feyerabend, Paul (2001). *¿Por qué no Platón?*, España: Tecnos.

——— (1999). *Ambigüedad y armonía*, España: Paidós/UAB.
——— (1992). *Tratado contra el método*, México: REI.
——— (1991). *Diálogos sobre el conocimiento*, España: Cátedra.
Guénard, François y Gilbert Leliévre (eds.) (1999). *Pensar la matemática*, España: Tusquets.
Gulick, Denny (2000). *Encounters with chaos*, UK: IoP.
Gödel, Kurt (1992). *On formally undecidable propositions of principia mathematica and related systems*, USA: Dover.
Heisenberg, W. (1971) *Physics and Beyond: Encounters and Conversations*, USA: Harper and Row.
Hume, David (1993). *Tratado Sobre la Naturaleza Humana*, México: El Ateneo.
——— (1980). *Del conocimiento*, Argentina: Aguilar.
Kant, Emmanuel (2008). *De la forma y de los principios del mundo sensible y del mundo inteligible*, España: Libera.
——— (2006). *Crítica del juicio*, México: Editores Mexicanos Unidos.
——— (1994). *Crítica de la razón práctica*, México: ESPASA-CALPE.
Kapitaniak, T. (2000). *Chaos for engineers*, Germany: Springer Verlag.
Kowalski, H. (1965). *Topological spaces*, USA: Academic Press.
Leibniz, Godofredo (2003). *Nuevo tratado sobre el entendimiento humano*, México: Porrúa.
Mendelson, Bert (1990). *Introduction to topology*, USA: Dover.
Miller, David (comp.) (1997). *Popper escritos selectos*, México: FCE.
Mosterín, Jesús (1978). *Racionalidad y acción humana*, España: Alianza.
Nagashima, H and Y. Baba (1999). *Introduction to chaos*, UK: IoP.
Olivé, León (comp.) (1988). *Racionalidad*, México: Siglo XXI/UNAM.
Popper, Karl (1994). *Conjeturas y refutaciones*, España: Paidós.
Prigogine, Ilya (1999). *Las leyes del caos*, España: Crítica.
——— e Isabelle Stengers (1992). *Entre el tiempo y la eternidad*, Argentina: Alianza.
Puu, Tönu (2000). *Atractors, bifurcations and chaos*, Germany: Springer Verlag.
Quine, W. (1998). *Filosofía de la lógica*, España: Alianza.
Ríos, Sixto (1995). *Modelización*, España: Alianza.
Romanelli, Lilia (2006). *Teoría del caos en los sistemas biológicos*, (http://www.scielo.org.ar/pdf/rac/v74n6/v74n6a12.pdf) consultada el 18 de julio de 2011.
Sametband, Moisés (1999). *Entre el orden y el caos la complejidad*, México: FCE.
Seron, María Marta (2000). *Sistemas no lineales*: *notas de clase*, Argentina: Universidad de Rosario, Mimeo.

Sibirsky, K. (1975). *Introduction to topological dynamics*, Holland: Noordhoff.
Spiegel, Murray (1983). *Ecuaciones diferenciales*, México: Prentice Hall.
Stegmüller, Wolfgang (1979). *Teoría y experiencia*, España: Ariel.
UNAM (2009). *Programa de Desarrollo Urbano de Milpa Alta*, México: UNAM.
Vilar, Sergio (1997). *La nueva racionalidad*, España: Kairós.
Wark, Kenneth (1985). *Termodinámica*, México: Mc Graw Hill.
Wittgenstein, Ludwig (2000). *Sobre la certeza*, España: Gedisa.
——— (1991). *Tractatus Logico-Philosophicus*, España: Alianza.
——— (1976). *Los Cuadernos Azul y Marrón*, España: Tecnos.
Zill, Dennis (2007). *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones de modelado*, México: Thomson.
——— (1988). *Ecuaciones diferenciales*, México: Grupo Editorial Iberoamérica.