

Crecimiento económico vía cambio tecnológico gubernamental

(Recibido: julio/09–aprobado: enero/010)

*Salvador Rivas-Aceves**

Resumen

Uno de los temas de gran interés en la teoría del crecimiento endógeno es el cambio tecnológico y su efecto sobre el crecimiento. Tradicionalmente, el cambio tecnológico ha sido estudiado desde el punto de vista del sector empresarial. El presente trabajo incorpora a la teoría del crecimiento la participación del gobierno como agente generador del cambio tecnológico. Inicialmente se establecen las condiciones, bajo un ambiente determinista, sobre las cuales el gobierno puede generar un cambio tecnológico, se caracteriza el equilibrio macroeconómico y se analiza el impacto sobre el bienestar económico. Posteriormente, la misma hipótesis es introducida en un modelo estocástico de crecimiento, se establece el equilibrio y se analiza, una vez más, el efecto sobre el bienestar. Bajo ambos ambientes se verifican los mismos resultados con respecto a que el impacto del gobierno, como agente generador del cambio tecnológico, es positivo sobre el crecimiento y el bienestar económico.

Palabras clave: cambio tecnológico, crecimiento endógeno, gobierno.

Clasificación JEL: O38, O33.

* Profesor Visitante del Departamento de Economía de la UAM-Azcapotzalco (rivas.salvador@gmail.com).

Introducción

Una buena calidad de vida es una de las principales preocupaciones de las naciones en la actualidad, esto se puede obtener cuando una economía crece a un ritmo sostenido y avanza hacia el desarrollo. Por lo tanto, conocer los determinantes del crecimiento económico es fundamental para alcanzar dicha meta. Dentro de los principales determinantes está el progreso estudiado por primera vez por Bacon (1626) quien fijó su interés en el porvenir de la ciencia y sus posibilidades futuras orientadas hacia la conquista de la naturaleza por el hombre.

Con respecto a la teoría del crecimiento, Smith (1776), Ricardo (1817) y Malthus (1798) fueron los primeros en orientar sus principales preocupaciones en torno a los recursos naturales como la tierra, el crecimiento de la población, la capacidad productiva, el comercio y la expansión de la economía enfatizando el papel de la oferta, todos ellos como determinantes fundamentales del crecimiento económico. Después, fue el proceso de acumulación de capital y la propiedad de los medios de producción el centro de atención al interior de la teoría del crecimiento, tomando a la productividad de manera exógena.

Más adelante, la teoría evolucionó y los modelos de crecimiento exógeno surgieron gracias a las aportaciones de Ramsey (1928), Cass (1965), Koopmans (1965), Domar (1946), Solow (1956) y Swan (1956), a partir de considerar el crecimiento de la población y la capacidad productiva como variables predeterminadas y utilizar al ingreso, la tasa de interés, la propensión marginal al ahorro, el capital y el trabajo como factores esenciales del crecimiento. El progreso tecnológico fue introducido por primera vez al análisis del crecimiento por Harrod (1939)¹ mediante una función de producción con producto marginal del capital constante, mientras que Arrow (1962)² lo hizo al introducir el conocimiento y el aprendizaje como causa principal del cambio tecnológico. Por su parte, Uzawa (1965) mostró que el cambio tecnológico se puede dar por medio de un incremento en la eficiencia laboral, el cual no depende de la cantidad de capital usado en el proceso productivo, como parte del conocimiento tecnológico y puede ser modificado por la educación, la salud, la infraestructura y por el consumo de bienes públicos. Uzawa encontró que existe una relación capital-trabajo eficiente que genera un crecimiento óptimo.

La teoría del crecimiento siguió su curso y, en la década de los ochenta, el crecimiento endógeno surge mediante Romer (1986) y Lucas (1988) quienes consideraron al cambio tecnológico como un proceso que explica las modificaciones en

¹ El progreso tecnológico está en función del valor del capital usado en el proceso de producción.

² El conocimiento es resultado del aprendizaje que está en función de la experiencia.

las condiciones de producción de las empresas en función de cambios cualitativos o cuantitativos de los insumos, tales como el *stock* de conocimiento, el capital humano o el trabajo calificado, el cual genera crecimiento económico.

Existen en la actualidad varias explicaciones sobre el crecimiento económico en función del cambio de las condiciones tecnológicas a las que se enfrentan las empresas, bajo la teoría del crecimiento endógeno destacan Prescott y Boyd (1987), Segerstrom, Anant y Dinopoulos (1990), Romer (1990), Rivera-Batiz y Romer (1991), Aghion y Howitt (1992, 1994), Landesmann y Goodwin (1994), Young (1998) y Howitt (1999).

Las contribuciones más recientes dentro del marco de los modelos de Investigación y Desarrollo (I+D) están dadas por Boucekine y De la Croix (2003), muestran que si se presenta un cambio tecnológico, el cual se da por medio de un sector de investigación y de trabajo calificado, entonces los *shocks* tecnológicos afectan la tasa de crecimiento y no así los *shocks* en capital. Caminati (2004) argumenta que la preferencia por la variedad de productos tendrá un efecto positivo sobre el crecimiento si la creación de nuevos bienes es endógena. Por último, Reikard (2005) encontró que el cambio tecnológico se da mediante un sector de investigación y las trayectorias de equilibrio de la actividad en I+D dependen negativamente de los precios y positivamente del producto.

A nivel empírico Pavitt y Soete (1981) mostraron que existe una relación entre las actividades en innovación y el crecimiento del PIB, con una muestra de 14 países. Asimismo, Fagerberg (1988) amplió el análisis realizado por Pavitt y Soete utilizando una muestra de 27 países incluyendo a América Latina y Asia, encontró que la tasa de crecimiento del PIB depende de la difusión tecnológica internacional, del nivel doméstico de actividad innovadora y de las tasa de crecimiento de la inversión. Por otro lado, Syrquin (1994) halló que la tasa de crecimiento del producto está positivamente relacionada con la tasa de crecimiento de la productividad laboral y de la productividad multifactorial.

En la mayor parte de los desarrollos teóricos que analizan el cambio tecnológico se supone que dicho cambio sólo se puede dar de manera exclusiva por las empresas por medio de actividades de investigación y desarrollo, pero no se dice nada acerca de la participación del gobierno en este campo. El gasto del gobierno ha sido introducido como un argumento de la función de producción sólo para analizar el impacto que tiene sobre la capacidad productiva de la economía, por ejemplo en Barro (1990), Barro y Sala-i-Martin (1992), Glomm y Ravikumar (1994), Cazzavillan (1996) y Turnovsky (1996). También para medir el impacto de las políticas económicas sobre el crecimiento: Turnovsky (1993), Easterly, King, Levine y Rebelo (1994), Ludvigson (1996), Benavie, Grinols y Turnovsky (1996)

y Caminati (2001). Por último, bajo la forma de gasto gubernamental productivo y su impacto sobre la dinámica de la economía en Fisher y Turnovsky (1998), Bond, Wang y Yip (1996), Turnovsky (1998, 1999, 2000, 2000b), Chartterjee, Sakoulis y Turnovsky (2002), Gong y Zou (2003) y Gokan (2007).

Existen muy pocas explicaciones acerca del papel que puede tener el gobierno en la generación del cambio tecnológico, algunas de las cuales se realizan bajo el enfoque de la organización industrial principalmente a nivel microeconómico (véanse Mamuneas y Nadiri, 1996; Ham y Mowery, 1998; Mamuneas, 1999). A partir de dicho enfoque, existen también desarrollos teóricos desde la perspectiva macroeconómica acerca del papel que puede tener el gobierno en la generación del cambio tecnológico, vía la investigación básica y aplicada, como por ejemplo en Glomm y Ravikumar (1994) y en Morales (2004).

En el mismo marco de la teoría neoclásica, pero ahora en la teoría del crecimiento, bajo competencia perfecta, Rivas-Aceves y Venegas-Martínez (2008 y 2010), Rivas-Aceves y Carranco (2009) y una aplicación del primero en Venegas-Martínez y Rivas-Aceves (2008), mediante un análisis de estática comparativa a partir del equilibrio macroeconómico, se muestra que el impacto sobre el crecimiento y el bienestar económico de los hogares es positivo cuando el gobierno destina recursos hacia la generación de nuevas tecnologías.

De la revisión realizada se puntualizan dos conclusiones. Primero, que hay muchas formas por medio de las cuales una sociedad puede acumular conocimiento, como por ejemplo educación, capacitación laboral, investigación científica, innovación de procesos, innovación de productos e innovaciones industriales que afectan la calidad de los bienes a producir. Todas generan un cambio tecnológico que promueve el crecimiento económico. Sin embargo, ninguna explica cómo la intervención gubernamental genera un cambio tecnológico.

Y segundo, que generalmente la teoría del equilibrio general ha explicado que el gobierno debe proveer bienes públicos y las empresas bienes privados,³ por lo tanto, al interior de la teoría del crecimiento neoclásica lo anterior usualmente se supone. También, sostiene que la investigación básica (sustento base sobre el cual se realizan otras investigaciones) es un bien público, es decir, no puede ser excluyente y que la investigación avanzada (realizada a partir de la investigación básica) es un bien privado, es decir, es un bien rival.⁴ Sin embargo, el gobierno

³ Un bien público satisface dos condiciones: que su consumo sea no rival y no excluyente. Si una de estas dos condiciones no se satisface, entonces el bien es privado.

⁴ Al respecto, se debe tomar en cuenta que un bien es rival si cuando lo usa un individuo o empresa se puede descartar su uso por cualquier otro agente. Por otro lado, es no rival si puede utilizarse por varios individuos o empresas al mismo tiempo. Un bien es excluyente si el dueño puede evitar que sea usado por otros y por lo tanto puede cobrar por su uso.

puede generar bienes que sean no rivales y potencialmente exclusivos, un ejemplo claro lo encontramos en la investigación que hacen los órganos militares para lograr el desarrollo de nuevas tecnologías que sean capaces de incrementar el nivel de eficiencia de las operaciones militares.

Dichos desarrollos, posteriormente, son incorporados a la sociedad y pueden ser empleados en actividades económicas, ejemplos como la telefonía celular, el uso de computadoras y programas e innovaciones en la aeronáutica encajan perfectamente aquí. En este sentido, Romer (1990b: 98) señala que “para la teoría del crecimiento lo que importa es que un bien sea parcialmente o totalmente exclusivo, en lugar de ser un bien rival” (traducción propia). Por lo tanto, el gobierno es un agente que también puede producir bienes excluyentes, lo cual justifica su consideración.

Por todo lo anterior, se puede concluir que el crecimiento económico es la suma de actividades de una sociedad completa, por lo cual necesariamente depende de la participación de todos los agentes y, de acuerdo con Romer (1994: 3), “en la teoría neoclásica del crecimiento, el centro del crecimiento endógeno está en el comportamiento de la economía como un todo” (traducción propia), entonces si el gobierno forma parte de la sociedad y más aún si interviene en la actividad económica, su incorporación en el modelado del crecimiento endógeno, vía el cambio tecnológico, es pertinente. Ello debido a que la participación del gobierno en el cambio tecnológico puede producir externalidades positivas que benefician a toda la sociedad.

La presente investigación sugiere la participación del gobierno en las actividades económicas mediante un gasto que genere un cambio en las condiciones tecnológicas de producción de la economía. Para ello, a partir de modelos de crecimiento endógeno se caracteriza el equilibrio macroeconómico y se establecen las condiciones bajo las cuales el gobierno genera un cambio tecnológico en una economía con ambientes deterministas en el primer apartado y con ambientes estocásticos en el segundo. En el tercer apartado se analiza la dinámica del gasto del gobierno. Finalmente, se presentan las conclusiones.

1. El cambio tecnológico gubernamental

Inicialmente considere una economía con rendimientos constantes a escala y rendimientos marginales decrecientes, donde viven agentes económicos con dotaciones y preferencias idénticas, que tienen vida infinita y que la técnica para producir un único bien está dada. Se trata de una nación que no sostiene intercambios comerciales con otras economías, por lo cual es cerrada, y donde los consumidores buscan

maximizar el nivel de utilidad que obtienen gracias al consumo. Suponga que dicha utilidad está dada por:

$$U = \int_0^{\infty} u(c)e^{-\rho t} dt \quad (1)$$

Donde:

c = consumo per cápita; y

ρ = tasa subjetiva de descuento la cual mide qué tan ansioso se encuentra un individuo por el consumo presente.

Para efectos de simplicidad en la notación se omitirán los subíndices que muestran la dependencia de las variables con respecto al tiempo. Suponga también que la utilidad por el consumo de los individuos está determinada por la siguiente función:

$$u(c) = 1 - nc \quad (2)$$

Este tipo de especificación del consumo permite obtener resultados analíticos simples, al mismo tiempo que satisface que $u'(c) > 0$ y $u''(c) < 0$. De esta manera, la utilidad marginal que le genera al consumidor una unidad adicional de consumo del bien, es positiva pero decreciente. Por otro lado, se supone que el consumidor posee una empresa, ello implica que simultáneamente toma decisiones de consumidor y de productor. Debido a que la técnica está dada, todos los productores enfrentan las mismas condiciones de producción representadas por:

$$f(k) = Ak \quad (3)$$

Este tipo de función de producción, utilizada por Harrod (1939) y por Rebelo (1991), cumple con las condiciones de Inada y muestra que el producto marginal del capital k es positivo, es decir $A > 0$. Esta variable expresa además el nivel tecnológico de la economía. Dado que el individuo asume los roles de consumidor y productor al mismo tiempo, entonces la restricción presupuestal del consumidor se puede expresar como:

$$k_0 = \int_0^{\infty} ce^{-At} dt \quad (4)$$

En consecuencia, del problema de optimización determinado por (1), (2) y (4) se obtienen las siguientes condiciones de optimalidad y el equilibrio macroeconómico:

$$\frac{1}{c} = \lambda_t \quad (5)$$

$$\dot{k} = Ak - c \quad (6)$$

$$A\lambda = -\dot{\lambda} + \rho\lambda \quad (7)$$

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} ke^{-At} \quad (8)$$

$$c = k_0 \rho e^{(A-\rho)t} \quad (9)$$

$$k = k_0 e^{(A-\rho)t} \quad (10)$$

$$y = Ak_0 e^{(A-\rho)t} \quad (11)$$

Donde:

k_0 = capital inicial.

Se puede observar que el consumo depende de las preferencias de los individuos ρ , del capital inicial con que cuenta el aparato productivo y del coeficiente tecnológico de la economía A . Por su parte, el nivel del capital de equilibrio sólo depende del capital inicial, mientras que el nivel de producto está en función del nivel tecnológico de la economía y del capital inicial. Como la tasa a la que crecen el consumo, el capital y, por lo tanto, el producto, depende de la diferencia $(A - \rho)$, entonces la tasa de crecimiento balanceado de la economía es:

$$\varphi = A - \rho \quad (12)$$

El crecimiento es balanceado porque, una vez que se obtienen las dinámicas del consumo $\dot{c} = c(A - \rho)$ y del capital $\dot{k} = k(A - \rho)$ y en virtud de que la función de producción es de la forma $f(k) = Ak$, la tasa de crecimiento económico per cápita φ cumple con:

$$\varphi = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k} = A - \rho \quad (13)$$

La conclusión parcial que nos da el modelo base consiste en que la tasa de crecimiento en todos los sectores de la economía depende del nivel tecnológico y de las preferencias de los individuos. En consecuencia, países con coeficientes tecnológicos altos crecen a tasas mayores. Por lo tanto, resulta evidente que si $A > \rho$, entonces todos los sectores crecen, mientras que si $A < \rho$ decrecen. Observe que dicho crecimiento es balanceado ya que se presenta de igual manera en todos los sectores.

Suponga ahora que el gobierno interviene en el desarrollo de tecnología afectando la productividad del capital, por lo cual la función de producción per cápita toma la forma:

$$y = Agk \quad (14)$$

Donde:

$g > 0$ es el gasto que el gobierno realizará como inversión en la tecnología;
 A = nivel tecnológico disponible en la economía;
 k = capital físico; y
 y = producto.

En el desarrollo teórico presente no se presta atención al origen de los recursos del gobierno, sin embargo esto no significa que no sea importante. Para profundizar en el análisis con respecto al impacto, sobre la tasa de crecimiento y el bienestar económico, debido al gasto de gobierno financiado por un impuesto sobre la renta, véase Rivas-Aceves y Carranco (2009). Bajo estas nuevas condiciones, la restricción presupuestal del consumidor se reescribe como:

$$k_0 = \int_0^{\infty} ce^{-Agt} dt \quad (15)$$

Las condiciones de optimalidad y el equilibrio macroeconómico, debido al problema de control óptimo dado por (1), (2) y (15), ahora son:

$$\frac{1}{c} = \lambda_t \quad (16)$$

$$\dot{k} = Agk - c \quad (17)$$

$$Ag\lambda = -\dot{\lambda} + \rho\lambda \quad (18)$$

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} k e^{-Ag t} \quad (19)$$

$$c = k_0 \rho e^{(Ag - \rho)t} \quad (20)$$

$$k = k_0 e^{(Ag - \rho)t} \quad (21)$$

$$y = A k_0 e^{(Ag - \rho)t} \quad (22)$$

De lo anterior se desprende que el nivel de consumo de equilibrio depende del parámetro de preferencias ρ , del capital inicial k_0 y del gasto de gobierno g . Un aumento en las últimas dos variables incrementará el nivel de consumo. Por otro lado, se tiene que si $Ag > \rho$, $g > 1$, entonces el consumo crecerá a un mayor ritmo que cuando no interviene el gobierno. En caso contrario, es decir si $Ag < \rho$, entonces el consumo decrecerá. Es deseable que $g > 1$ ya que sólo así se cumple que $Ag > A$. Lo anterior se cumple tanto para la trayectoria óptima del capital como para la del producto. De esta forma, si el gobierno invierte en tecnología, entonces puede influir en el crecimiento económico. Como las trayectorias del consumo y del capital dependen de la tasa subjetiva de descuento, de la tecnología y del gasto de gobierno, la tasa de crecimiento per cápita ahora estará dada por:

$$\gamma = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k} = Ag - \rho \quad (23)$$

Por lo tanto, el impacto del gasto de gobierno sobre la tasa de crecimiento es positivo ya que la tasa de crecimiento económico con la participación del gobierno es mayor que en su ausencia, es decir $\gamma > \varphi$.

A continuación se evalúa el impacto que tienen el gasto del gobierno, la tecnología y el capital inicial sobre el bienestar de los agentes, para ello se obtiene la función del bienestar económico W . Es importante establecer que el bienestar económico se asimila exclusivamente a la satisfacción de preferencias, por lo tanto, no hay otra fuente de bienestar para los consumidores. Dicha función resulta de la sustitución del nivel óptimo de consumo en la función directa de utilidad:

$$W = \int_0^{\infty} \ln(\rho k_0 e^{(Ag - \rho)t}) e^{-\rho t} dt \quad (24)$$

De manera equivalente:

$$W = \frac{\ln(\rho k_0)}{\rho} + \frac{Ag - \rho}{\rho^2} \quad (25)$$

De la ecuación anterior se deduce que el bienestar económico está en función del coeficiente tecnológico A , del impacto del gobierno g , de las preferencias del individuo ρ y del capital inicial k_0 . Un aumento en el gasto de gobierno, como inversión en tecnología, aumenta el bienestar. De esta manera, el gobierno no sólo participa en la generación de tecnología, sino que con ello incrementa el bienestar de los agentes. Lo anterior se debe a que:

$$\frac{\partial W}{\partial g} = \frac{A}{\rho^2} > 0 \quad (26)$$

Por su parte, un aumento en la tecnología por medio del parámetro A incrementará el bienestar, ya que se cumple con:

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \frac{g}{\rho^2} > 0 \quad (27)$$

Evidentemente, se espera que en países con un mayor desarrollo tecnológico el nivel de bienestar económico sea más alto que en naciones tecnológicamente rezagadas. Análogamente, un aumento en el capital inicial aumentará el bienestar económico de los agentes, toda vez que:

$$\frac{\partial W}{\partial k_0} = \frac{1}{\rho k_0} > 0 \quad (28)$$

Por último, un incremento en la tasa subjetiva de descuento, lo cual se traduce en una mayor ansiedad por parte del individuo para consumir en el presente, deteriora el bienestar debido a que:

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} = -\frac{2}{\rho^2} < 0 \quad (29)$$

En consecuencia, el bienestar aumentará conforme se tenga un aumento en el capital inicial, en el gasto de gobierno, o en el nivel de tecnología mediante el

coeficiente A . Por otro lado, el bienestar disminuirá si aumenta la tasa subjetiva de descuento. En resumen, el modelo muestra que, bajo las condiciones establecidas, la participación del gobierno en la generación de tecnología tiene un efecto positivo sobre el crecimiento y el bienestar.

2. El gasto de gobierno bajo incertidumbre

En este apartado se muestra que el efecto positivo sobre la tasa de crecimiento y el bienestar económico, debido al gasto destinado a la generación de nuevas tecnologías, se mantiene en una economía con incertidumbre acerca de los posibles resultados del proceso productivo. La incertidumbre fue caracterizada, por primera vez, por medio de modelos económicos estocásticos por Merton (1975). Con los mismos supuestos especificados en el apartado anterior y bajo las condiciones de producción establecidas por:

$$dy = Ak \quad (30)$$

se introduce ahora el gasto de gobierno.

Suponga que el nivel tecnológico A presenta una dinámica en función de posibles modificaciones en el gasto, que pueden variar momento a momento de acuerdo con la discrecionalidad de la política pública. Dicha dinámica está determinada por un movimiento geométrico browniano, con respecto de la participación del gobierno en las actividades económicas mediante un gasto destinado a modificar el nivel tecnológico. En consecuencia se tiene:

$$dR_g = \frac{dA}{A} = gdt + \hat{g} dz \quad (31)$$

Donde:

g = gasto instantáneo esperado;

\hat{g} = volatilidad asociada con dicho gasto; y

dz = variable aleatoria que se distribuye de manera normal con media cero y varianza $\hat{g}^2 dt$.

Si los individuos desempeñan los papeles de consumidor y productor de manera simultánea en la economía, entonces la restricción presupuestal del agente representativo es:

$$dk = kdR_g - cdt \quad (32)$$

Cuando se sustituye (31) en (32) la acumulación del capital queda determinada por la siguiente ecuación diferencial lineal estocástica homogénea:

$$dk = k \left(g - \frac{c}{k} \right) dt + k\hat{g} dz \quad (33)$$

Ahora los agentes obtienen utilidad sólo al consumir el único bien producido en la economía, de acuerdo con el valor esperado de la siguiente función de utilidad:

$$E \left[\int_0^{\infty} u(c) e^{-\rho t} dt \right] \quad (34)$$

Por lo tanto, la función de utilidad von Neumann-Morgenstern separable al tiempo $t = 0$ es:

$$V_0 = E \left[\int_0^{\infty} \ln c e^{-\rho t} ds \middle| F_0 \right] \quad (35)$$

Donde:

F_0 = información inicial disponible para el consumidor.

La condición Hamilton-Jacobi-Bellman que satisface el problema de control óptimo estocástico determinado por (33) y (35) es:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 \hat{g}^2 \quad (36)$$

Al derivar la ecuación (36) con respecto a c se obtiene que $1/c - V'(k) = 0$. Si se define $V(k) = \delta_0 + \delta_1 \ln k$, entonces $V'(k) = \delta_1/k$ y $V''(k) = -\delta_1/k^2$, por lo cual se obtiene que $c = k/\delta_1$. En consecuencia (36) se puede reescribir como:

$$0 = \ln k(1 - \rho\delta_1) - \ln\delta_1 - \rho\delta_0 + \delta_1 g - 1 - \frac{1}{2} \delta_1 \hat{g}^2 \quad (37)$$

Si se supone que $(1 - \rho\delta_1) = 0$, entonces:

$$0 = \ln \rho - \rho\delta_0 + \frac{g}{\rho} - \frac{\hat{g}^2}{2\rho} - 1 \quad (38)$$

Por lo tanto, las siguientes condiciones de equilibrio se pueden establecer:

$$\delta_1 = \frac{1}{\rho} \quad (39)$$

$$\delta_0 = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{g}{\rho} - \frac{\hat{g}^2}{2\rho} \right) \quad (40)$$

$$k = k_0 e^{(g - \rho - \frac{1}{2}\hat{g}^2)t + \hat{g}Z_t} \quad (41)$$

$$c = \rho k_0 e^{(g - \rho - \frac{1}{2}\hat{g}^2)t + \hat{g}Z_t} \quad (42)$$

Nótese que las trayectorias óptimas o de equilibrio del capital y el consumo siguen dependiendo de los parámetros indicados en el apartado anterior, pero con una tasa de crecimiento diferente. Dicha tasa de crecimiento es:

$$\psi = g - \rho - \frac{1}{2}\hat{g}^2 + \hat{g}\xi_t \quad (43)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \xi_t &= Z_t; \text{ y} \\ \xi_t &\sim N(0,1). \end{aligned}$$

Una vez más, la economía en promedio crecerá si $g + \hat{g}\xi > -\rho - 1/2 (\hat{g}^2)$. La ecuación (43) muestra que, cuando la dinámica del nivel tecnológico está dada sólo por la participación del gobierno en función de un gasto destinado a la generación de nuevas tecnologías, la tasa de crecimiento económico depende de manera positiva del gasto medio esperado y de manera negativa de la volatilidad en dicho gasto. Lo anterior significa que una política pública inestable, en el sentido de

modificaciones continuas al presupuesto destinado al progreso tecnológico, genera efectos negativos. Por otro lado, se tiene:

$$V = E \left[\int_0^{\infty} \ln c e^{-\rho t} ds \middle| F_t \right] = J(k, t) = V(k) e^{-\rho t} = (\delta_0 + \delta_1 \ln k) e^{-\rho t} \quad (44)$$

y al sustituir (39) y (40) en ella, se tiene la función de utilidad indirecta o ecuación del bienestar económico, al tiempo $t = 0$ siguiente:

$$W = J(k, 0) = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{g}{\rho} - \frac{\hat{g}^2}{2\rho} + k_0 \right) \quad (45)$$

Por medio de un análisis de estática comparativa se puede establecer que incrementos en el gasto esperado de gobierno tienen un impacto positivo sobre el bienestar económico de los hogares. Por su parte, un aumento en la volatilidad de dicho gasto genera una caída en el bienestar. Lo anterior se verifica gracias a que:

$$\frac{\partial W}{\partial g} = \frac{1}{\rho^2} > 0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \hat{g}} = -\frac{\hat{g}}{\rho^2} < 0 \quad (47)$$

De esta manera, el modelo aquí analizado muestra que la participación del gobierno en la generación del cambio tecnológico, en una economía con ambientes cambiantes o de incertidumbre, genera impactos positivos sobre la tasa de crecimiento y el bienestar de los hogares.

3. La dinámica en el gasto de gobierno

En la economía viven agentes que se preocupan por su descendencia, es decir, por sus hijos, los hijos de sus hijos y así sucesivamente, además presentan dotaciones iniciales idénticas. Estos agentes obtienen utilidad debido al consumo de un bien perecedero de acuerdo al valor esperado de la siguiente función de felicidad:

$$E \left[\int_0^{\infty} u(c) e^{-\rho t} dt \right] \quad (48)$$

Esta especificación cumple con la ley de rendimientos marginales decrecientes. Al suponer una utilidad de la forma $u(c) = \ln c$ para el consumidor, se puede obtener su función de utilidad von Neumann-Morgenstern separable al tiempo $t = 0$ siguiente:

$$V_0 = E \left[\int_0^{\infty} \ln c e^{-\rho t} ds \middle| F_0 \right] \quad (49)$$

Donde:

F_0 = información inicial disponible para el consumidor.

Asimismo, los individuos también toman decisiones de producción bajo las siguientes condiciones:

$$dy = AGk \quad (50)$$

Donde:

A = nivel tecnológico de la economía;

G = gasto de gobierno destinado al cambio tecnológico; y

k = capital físico necesario para producir una unidad de producto y .

Siguiendo con la especificación establecida en la ecuación (14) suponga que:

$$G = \frac{dg}{g} = \mu_g dt + \sigma_g dw \quad (51)$$

Donde:

μ_g = gasto presupuestado esperado;

σ_g = cambios instantáneos destinados a la generación de tecnología; y

dw = variable aleatoria con media cero y varianza $\sigma_g dt$.

De manera análoga a las condiciones establecidas con respecto al cambio tecnológico, para que a partir de (51) se de dicho cambio es necesario que $AG > A$, lo cual implica que $G > 1$. Se sabe que la ecuación de acumulación del capital está medida por la siguiente ecuación diferencial lineal estocástica homogénea:

$$dk = AGk - c dt \quad (52)$$

Al sustituir (51) en (52), la restricción presupuestal se reescribe como:

$$dk = k \left(A\mu_g - \frac{c}{k} \right) dt + k\sigma_g dw \quad (53)$$

Del problema de control óptimo estocástico dado por (49) y (53) se obtiene la siguiente condición Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(A\mu_g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 \sigma_g^2 A^2 \quad (54)$$

Suponga que $V(k) = \beta_0 + \beta_1 \ln k$, si se deriva la ecuación anterior con respecto a c se encuentran las siguientes condiciones:

$$\frac{1}{c} - V'(k) = 0 \quad (55)$$

$$V'(k) = \frac{\beta_1}{k} \quad (56)$$

$$V''(k) = -\frac{\beta_1}{k^2} \quad (57)$$

Cuando se sustituye (56) en (55) se obtiene:

$$c = \frac{k}{\beta_1} \quad (58)$$

Por lo tanto, la condición Hamilton-Jacobi-Bellman se puede reescribir de la siguiente manera:

$$0 = \ln k(1 - \rho\beta_1) - \ln \beta_1 - \rho\beta_0 + \beta_1 A\mu_g - 1 - \frac{1}{2} \beta_1 \sigma_g^2 A^2 \quad (59)$$

Nótese que, a diferencia de la condición Hamilton-Jacobi-Bellman establecida en el apartado anterior, la ecuación (59) aparece en función del nivel tecnológico de la economía medido por A . Cuando se establece que $(1 - \rho\beta_1) = 0$, entonces:

$$0 = \ln \rho - \rho \beta_0 + \frac{A\mu_g}{\rho} - \frac{\sigma_g^2 A^2}{2\rho} - 1 \quad (60)$$

Por lo tanto, se puede establecer el siguiente equilibrio macroeconómico:

$$\beta_1 = \frac{1}{\rho} \quad (61)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{A\mu_g}{\rho} - \frac{\sigma_g^2 A^2}{2\rho} \right) \quad (62)$$

$$k = k_0 e^{\left(A\mu_g - \rho - \frac{1}{2} A^2 \sigma_g^2 \right) t + g W_t} \quad (63)$$

$$c = \rho k_0 e^{\left(A\mu_g - \rho - \frac{1}{2} A^2 \sigma_g^2 \right) t + A \sigma_g W_t} \quad (64)$$

$$\psi = A\mu_g - \rho - \frac{1}{2} A^2 \sigma_g^2 + g \xi \quad (65)$$

Donde:

$$\xi = W_t; \text{ y}$$

$$\xi \sim N(0,1).$$

Como se aprecia, la trayectoria del capital depende sólo del capital inicial existente en la economía, mientras que la trayectoria óptima del consumo depende del parámetro de preferencias y el capital inicial. Por su parte, la tasa de crecimiento de la economía depende del gasto que el gobierno destine a la generación de nueva tecnología, del nivel tecnológico de la economía y de las preferencias de los individuos. Por lo tanto, la economía crecerá sólo si $AM_g + g\xi > -\rho - 1/2 (A^2\sigma_g^2)$, en caso contrario la economía decrecerá. Asimismo, la ecuación (65) muestra que el gasto esperado de gobierno tiene un efecto positivo sobre el crecimiento, por su parte, las modificaciones continuas en dicho gasto medidas por σ_g^2 tienen un efecto negativo sobre la tasa de crecimiento. Por lo tanto, es deseable tener siempre el mismo flujo de recursos destinados al cambio tecnológico. Lo anterior verifica los

resultados obtenidos en el apartado 2 en el sentido de que lo importante es un gasto constante, para cada momento t , destinado a la generación de nuevas tecnologías porque sólo así se consigue que la economía crezca a una tasa mayor. En resumen, el impacto positivo sobre el crecimiento debido a la participación del gobierno en las actividades económicas, mediante la generación de nuevas tecnologías, se verifica bajo condiciones de certidumbre y de incertidumbre.

Para analizar el impacto del gasto sobre el bienestar económico de los hogares, es necesario recordar que:

$$V = E \left[\int_0^{\infty} \ln c e^{-\rho t} ds \middle| F_t \right] = J(k, t) = V(k) e^{-\rho t} = (\beta_0 + \beta_1 \ln k) e^{-\rho t} \quad (66)$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones (61) y (62) en (66) se obtiene la función de utilidad indirecta al tiempo t siguiente:

$$J(k, t) = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{A\mu_g}{\rho} - \frac{\sigma_g^2 A^2}{2\rho} + \ln k \right) e^{-\rho t} \quad (67)$$

Equivalentemente, al evaluar en $t = 0$ se tiene:

$$W = j(k, 0) = \frac{1}{\rho} \left(\ln \rho - 1 + \frac{A\mu_g}{\rho} - \frac{\sigma_g^2 A^2}{2\rho} \right) + \frac{1}{\rho} k_0 \quad (68)$$

El siguiente ejercicio de estática comparativa nos permite mostrar que la participación del gobierno por medio del gasto esperado tiene un efecto positivo sobre el bienestar, como se aprecia en (69), mientras que cambios drásticos instantáneos en dicho gasto tienen un impacto negativo, véase (70).

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_g} = \frac{A}{\rho^2} > 0 \quad (69)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_g} = -2 \frac{\sigma_g A^2}{\rho^2} < 0 \quad (70)$$

En consecuencia, se ha mostrado que el gobierno puede y debe intervenir en las actividades de innovación y desarrollo tecnológico ya que contribuye de manera positiva a que la economía crezca a un mayor ritmo, sobre todo cuando el sector privado no lleva a cabo dichas actividades. Lo anterior se puede deducir a partir de las condiciones establecidas, toda vez que en los modelos aquí desarrollados la empresa no genera un cambio en las condiciones tecnológicas. Si así lo hiciera es probable que el efecto conjunto de empresas y gobierno pudiera ser positivo, lo cual plantea parte de la agenda pendiente.

Conclusiones

Con base en un modelo de crecimiento endógeno, con productividad marginal del capital constante, rendimientos marginales decrecientes, rendimientos constantes a escala y agentes con vida infinita y una técnica dada para producir, se mostró que la participación del gobierno en las actividades económicas vía la generación de nueva tecnología, por medio del gasto gubernamental, tiene un impacto positivo sobre la tasa de crecimiento económico y sobre el bienestar económico de los hogares, tanto en ambientes deterministas como estocásticos. En particular, los esfuerzos constantes en materia de recursos (monetarios, de capital humano, infraestructura, etcétera) proporcionados por el gobierno destacan por su fomento al crecimiento, y no así modificaciones sustanciales en el mismo. En consecuencia, las políticas públicas orientadas hacia la generación del progreso tecnológico son deseables, sobre todo cuando el sector público se fija metas específicas de crecimiento sostenido de mediano y largo plazo.

Dentro de las principales limitaciones del análisis realizado se encuentran suponer que el gobierno sólo interviene en las actividades económicas mediante la generación de la tecnología, es necesario ampliar el papel del mismo. Por su parte, mantener una economía cerrada limita el análisis con respecto al efecto que puede o no tener, sobre la economía doméstica, el progreso tecnológico de otras economías.

Sin duda, la agenda pendiente debe considerar los aspectos antes mencionados así como la modificación a los supuestos iniciales establecidos en esta investigación. Por ejemplo, considerar preferencias distintas o endógenas, una tecnología distinta para cada productor y no homogénea, etc.

Referencias bibliográficas

- Aghion, P. y P. Howitt (1994). "Endogenous Technical Change: The Schumpeterian Perspective, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development", *Proceedings of the IEA Conference*, Varenna, Italy, pp. 118-131.
- (1992). "A Model of Growth through Creative Destruction", *Econometrica*, vol. 60, num. 2, pp. 323-351.
- Arrow, K. (1962). "The Economic Implications of Learning by Doing", *Review of Economic Studies*, vol. 29, num. 3, pp. 155-173.
- Bacon, F. (1626). *The New Atlantis*, London.
- Barro, R. (1990). "Government Expending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, vol. 98, num. 5, pp. S103-S125.
- Barro, R. and X. Sala-i-Martin (1992). "Public Finance in Models of Economic Growth", *Review of Economic Studies*, vol. 59, pp. 654-661.
- Benavie, A., E. Grinols and S. Turnovsky (1996). "Adjustment Costs and Investment in a Stochastic Endogenous Growth Model", *Journal of Monetary Economics*, vol. 38, pp. 77-100.
- Bond W., P. Wang and K. Yip (1996). "A General Two-Sector Model of Endogenous Growth with Human and Physical Capital: Balanced Growth and Transitional Dynamics", *Journal of Economic Theory*, vol. 68, pp. 149-173.
- Boucekkine, R. and De la Croix (2003). "Information Technologies, Embodiment and Growth", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 27, pp. 2007-2034.
- Caminati, M. (2004). "Variety, Consumption and Growth", *Conference Economic Growth and Distribution: On the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, University of Siena, June, pp. 1-25.
- (2001). "R&D Models of Economic Growth and the Long-Term Evolution of Productivity and Innovations", *Conference: Old and New Growth Theories: An Assessment*, University of Pisa, October, pp. 1-28.
- Cass, D. (1965). "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, num. 32, pp. 233-240.
- Cazzavillan, G. (1996). "Public Spending, Endogenous Growth and Endogenous Fluctuations", *Journal of Economic Theory*, vol. 71, pp. 394-415.
- Chatterjee, S., G. Sakoulis and S. Turnovsky (2002), "Unilateral Capital Transfers, Public Investment and Economic Growth", *European Economic Review*, vol. 47, pp. 1077-1103.
- Domar, E. (1946). "Capital Expansion, Rate of Growth and Employment", *Econometrica*, vol. 14, num. 2, pp. 137-147.

- Dosi, G., C. Freeman, R. Nelson, G. Silverberg and L. Soete (1988). *Technical Change and Economic Theory*, London: Francis Pinter, New York: Columbia University Press.
- Easterly, W., R. King, R. Levine and S. Rebelo (1994). "Policy, Technology Adoption and Growth, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development", *Proceedings of the IEA Conference*, Varenna, Italy, pp. 75-89.
- Fagerberg, I. (1988). "Why Growth Rates Differ", in G., Dosi, C. Freeman, R. Nelson, G. Silverberg and L. Soete, *Technical Change and Economic Theory*, London: Francis Pinter, New York: Columbia University Press.
- Fisher, W. and S. Turnovsky (1998). "Public Investment, Congestion, and Private Capital Accumulation", *The Economic Journal*, vol. 108, num. 447, pp. 399-413.
- Glomm, G. and B. Ravikumar (1994). "Public Investment in Infrastructure in a Simple Growth Model", *Journal of Economics Dynamics and Control*, vol. 18, pp. 1173-1187.
- Gong, L. and H. Zou (2003). "Military Spending and Stochastic Growth", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 28, pp. 153-170.
- Gokan, Y. (2007). "Infrastructure, Alternative Government Finance and Stochastic Endogenous Growth", *Journal of economic Dynamics and Control*, (doi:10.1016/j.jedc.2007.01.029).
- Harrod, R. (1939). "An Essay in Dynamic Theory", *The Economic Journal*, vol. 49, num. 193, pp. 14-33.
- Ham, R. and D. Mowery (1998). "Improving the Effectiveness of Public-Private R&D Collaboration: Case Studies at a US weapons Laboratory", *Research Policy*, 26, pp. 661-675.
- Howitt, P. (1999). "Steady Endogenous Growth with Population and R&D Inputs Growing", *The Journal of Political Economy*, vol. 107, num. 4, pp. 715-730.
- Koopmans, T. C. (1965). "On the Concept of Optimal Economic Growth", *The Econometric Approach to Development Planning*, Amsterdam: North Holland.
- Landesmann, M. and R. Goodwin (1994). "Productivity Growth, Structural Change and Macroeconomic Stability, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development", *Proceedings of the IEA Conference*, Varenna, Italy, pp. 205-240.
- Lucas, R. (1988). "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, vol. 22, pp. 3-42.
- Ludvigson, S. (1996). "The Macroeconomic Effects of Government Debt in a Stochastic Growth Model", *Journal of Monetary Economics*, vol. 38, pp. 25-45.
- Malthus, T. R. (1798). *An Essay on the Principle of Population*, London.
- Mamumeas, T. (1999). "Spillovers from Publicly Financed R&D Capital in High-Tech Industries", *International Journal of Industrial Organization*, 17, pp. 215-239.

- Mamumeas, T. and M. Nadiri (1996). "Public R&D Policies and Cost Behavior of the US Manufacturing Industries", *Journal of Public Economics*, 63, pp. 57-81.
- Merton, R. (1975). "An Asymptotic Theory of Growth Under Uncertainty", *The Review of Economic Studies*, vol. 42, num. 3, pp. 375-393.
- Morales, M. (2004). "Research Policy and Endogenous Growth", *Spanish Economic Review*, num. 6, pp. 179-209.
- Pavitt, K. and L. Soete (1981). "International Differences in Economic Growth and the International Location of Innovation, Emerging Technologies: Consequences for Economic Growth, Structural Change and Employment", H. Giersch (ed.), *Emerging Technologies-Consequences for Economic Growth, Structural Change and Employment*, Tübingem, Germany: JCB Mohr.
- Prescott, E. and J. Boyd (1987). "Dynamics Coalitions: Engines of Growth", *The American Economic Review*, vol. 77, num. 2, pp. 63-67.
- Ramsey, F. (1928). "A Mathematical Theory of Saving", *The Economic Journal*, vol. 38, num. 152, pp. 543-559.
- Rebelo, S. (1991). "Long Run Policy Analysis and Long Run Growth", *The Journal of Political Economy*, vol. 99, num. 3, pp. 500-521.
- Reikard, G. (2005). "Endogenous Technical Advance and the Stochastic Trend in Output: A Neoclassical Approach", *Research Policy*, vol. 34, pp. 1476-1490.
- Ricardo, D. (1817). *Principles of Political Economy and Taxation*, London.
- Rivas-Aceves, S. y Z. Carranco (2009). "El gobierno como promotor del crecimiento: desarrollo tecnológico e incremento de la habilidad laboral", *Análisis Económico*, vol. 24, núm. 55, 235-254.
- Rivas-Aceves, S. y F. Venegas-Martínez, (2010). "Gobierno como promotor del cambio tecnológico: Un modelo de crecimiento endógeno con trabajo, dinero y deuda", *Economía Mexicana, Nueva época*, Vol. XIX, núm. 1, en prensa.
- (2008). "Participación del Gobierno en el Desarrollo Tecnológico en un Modelo de Crecimiento Endógeno de una Economía Monetaria", *Problemas del Desarrollo, Revista Latinoamericana de Economía*, vol. 39, núm. 152, pp. 47-68.
- Rivera-Batiz, L. and P. Romer (1991). "International Trade with Endogenous Technological Change", *European Economic Review*, vol. 35, pp. 971-1004.
- Romer, P. (1994). "The Origins of Endogenous Growth", *The Journal of Economic Perspectives*, vol. 8, num. 1, pp. 3-22.
- (1990). "Endogenous Technological Change", *The Journal of Political Economy*, vol. 98, num. 5, Part 2: The Problem of Development: A Conference of the Institute for the Study of Free Enterprise System, pp. S71-S102.

- (1990b). “Are Nonconvexities Important for Understanding Growth?”, *The American Economic Review*, vol. 80, num. 2, pp. 97-103.
- (1986). “Increasing Returns and Long-Run Growth”, *The Journal of Political Economy*, vol. 94, num. 5, pp. 1002-1037.
- Segerstrom, P., A. Anant and E. Dinopoulos (1990). “A Schumpeterian Model of the Product Life Cycle”, *The American Economic Review*, vol. 80, num. 5, pp. 1077-1091.
- Smith, A. (1776). *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, Edinburgh.
- Solow, R. (1956). “A Contribution to the Theory of Economic Growth”, *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, num. 1, pp. 65-94.
- Syrquin, M. (1994). “Structural Transformation and the New Growth Theory, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development”, *Proceedings of the IEA Conference*, Varenna, Italy, pp. 3-21.
- Swan, T. (1956). “Economic Growth and Capital Accumulation”, *Economic Record*, num. 32, pp. 334-361.
- Turnovsky, S. (2000). “Government Policy in a Stochastic Growth Model with Elastic Labor Supply”, *Journal of Public Economic Theory*, vol. 2, pp. 389-433.
- (2000b). “Fiscal Policy, Elastic Labor Supply, and Endogenous Growth”, *Journal of Monetary Economics*, num. 45, pp. 185-210.
- (1999). “On the Role of Government in a Stochastically Growing Open Economy”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 23, pp. 873-908.
- (1998). “Productive Government Expenditure in a Stochastically Growing Economy”, University of Washington, Seattle, pp. 1-38.
- (1996). “Optimal Tax, Debt, and Expenditure Policies in a Growing Economy”, *Journal of Public Economics*, vol. 60, pp. 21-44.
- (1993). “Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy”, *International Economic Review*, vol. 34, num. 4, pp. 953-981.
- Uzawa, H. (1965). “Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Endogenous Growth”, *International Economic Review*, vol. 6, num. 1, pp. 18-31.
- Venegas-Martínez F. y S. Rivas-Aceves (2008). “Impulso Tecnológico Gubernamental en la Agroindustria, un Modelo de Crecimiento Endógeno”, *Portes, Revista Mexicana de estudios sobre la Cuenca del Pacifico*, Universidad de Colima, vol. 2, núm. 3, enero-junio, pp. 203-234.
- Young, A. (1998). “Growth without Scale Effects”, *The Journal of Political Economy*, vol. 106, num. 1, pp. 41-63.

Apéndice

Las condiciones de primer orden necesarias para una solución interior correspondientes al problema especificado por (1), (2) y (4), son:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{k}; \quad -\frac{\partial H}{\partial k} = \dot{\lambda} - \lambda\rho \quad (\text{A.1})$$

Donde:

$$H = 1nc + \lambda(Ak - c).$$

Del Hamiltoniano resultan las condiciones de optimalidad (5)-(8), al sustituir (5) y (7) en (6) y solucionar se obtiene el equilibrio caracterizado por (9)-(11). Por su parte, el problema de maximización dado por (1), (2) y (14) y sus condiciones de optimalidad correspondientes (de primer orden) son:

$$\max U = \int_0^{\infty} \ln c e^{-\rho t} dt \quad \text{s.a.} \quad \dot{k} = Agk - c, \quad k_0 \text{ dado} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{k}; \quad -\frac{\partial H}{\partial k} = \dot{\lambda} - \lambda\rho \quad (\text{A.3})$$

Donde:

$$H = 1nc + \lambda(Agk - c); \text{ y}$$

λ = variable de co-estado.

Al resolver las condiciones establecidas por (A.3) se obtiene las condiciones de optimalidad dadas en (16)-(19), y al sustituir (16) y (18) en (17) y resolver, se encuentra el equilibrio dado por (20)-(22). Con respecto al problema planteado por (33) y (35), se tiene que:

$$J(k, t) = c_s \Big|_{(t, t+dt)}^{\max} E \left[\ln(c) e^{-\rho t} + o(dt) + J(k, t) + dJ(k, t) \Big| F_t \right] \quad (\text{A.4})$$

Por su parte, el Lema de Íto establece que:

$$dJ(k,t) = \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial k} k \left(g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial k^2} k^2 \hat{g}^2 \right] dt + \frac{\partial J}{\partial k} k \hat{g} dz \quad (\text{A.5})$$

Si se establece de nuevo que $J(k,t) = V(k)e^{-\rho t}$, entonces:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 \hat{g}^2 \quad (\text{A.6})$$

Recordando que para encontrar (A.6) se necesita sustituir $J(k,t) = V(k)e^{-\rho t}$, incorporar (A.5), aplicar esperanzas y fijar $E[dz] = 0$, dividir entre dt y tomar el límite cuando $t \rightarrow 0$ a (A.4). Finalmente, el problema planteado por (49) y (53), arroja que:

$$J(k,t) = c_s \Big|_{(t,t+dt)}^{\max} E \left[\ln(c)e^{-\rho t} + o(dt) + J(k,t) + dJ(k,t) \Big| F_t \right] \quad (\text{A.7})$$

Al aplicar el Lema de Íto se tiene:

$$dJ(k,t) = \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial k} k \left(A\mu_g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial k^2} k^2 \sigma_g^2 A^2 \right] dt + \frac{\partial J}{\partial k} k \sigma_g A dw \quad (\text{A.8})$$

Si se establece una vez más que $J(k,t) = V(k)e^{-\rho t}$, entonces:

$$0 = \ln c - \rho V(k) + kV'(k) \left(A\mu_g - \frac{c}{k} \right) + \frac{1}{2} V''(k) k^2 \sigma_g^2 A^2 \quad (\text{A.9})$$

Para encontrar (A.9) se requiere sustituir $J(k,t) = V(k)e^{-\rho t}$, incorporar (A.8), aplicar esperanzas y fijar $E[dw] = 0$, dividir entre dt y tomar el límite cuando $t \rightarrow 0$ en (A.7).