

Riesgo operativo: esquema de gestión y modelado del riesgo

(Recibido: mayo/09–aprobado: enero/010)

José Antonio Núñez Mora^{*}
José Juan Chávez Gudiño^{**}

Resumen

El objetivo de este artículo es dar un panorama completo acerca de la medición del riesgo operativo. Esto implica transitar de los conceptos más generales del riesgo operativo y su gestión, a aproximarse a su modelación con base en los elementos básicos de frecuencia de evento y severidad de pérdida, y al acercamiento a modelos más completos que implican el manejo de dependencia tanto en la teoría de valores extremos como en los procesos de Lévy.

Palabras clave: riesgo operativo, riesgo residual, riesgo intrínseco.

Clasificación JEL: G2.

^{*} Profesor del Instituto Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México (ITESM-CCM).

^{**} Funcionario de Scotiabank-Inverlat, México.

Introducción

Como se menciona en Cardona (2004), las operaciones de las instituciones financieras contienen explícita o implícitamente incertidumbre. La toma de riesgos es parte de la naturaleza de las actividades y decisiones económicas y financieras. El asunto central es la identificación, medición y administración de los diferentes tipos de riesgos.

En 1988, el comité de supervisión bancaria de Basilea estableció el primer acuerdo de capital, es decir, *Basilea I*. El centro de dicho documento era el riesgo crediticio de los bancos, a los cuales se les pedía proveer un mínimo de capital en caso de insolvencia de los deudores, véase Álvarez (2001). No fue sino hasta 1996, que se incluyó el riesgo de mercado.

Es en 2004 con el acuerdo de *Basilea II*, cuando se intenta trabajar de una manera más integral acerca de la solvencia y seguridad del sector financiero. Una de las innovaciones en este acuerdo es la inclusión de requerimientos de capital por riesgo operativo. Si bien es cierto que el riesgo operativo existe en todas las funciones de las entidades financieras, desde el primer instante de su vida, y su gestión ha sido importante para disminuir el fraude y desarrollar controles internos, sólo recientemente se ha desarrollado un interés formal por parte de los reguladores, consultores, académicos e instituciones financieras. Lo anterior es debido básicamente a las enormes pérdidas de las entidades financieras registradas por errores operacionales en el mercado, como fueron los casos de Banco Barings y Daiwa Bank en 1995, Sumimoto Bank en 1996 y Allied Irish Bank en 2000.

La desregulación y globalización del sistema financiero (geográfica por un lado porque desaparecen las diferencias entre países, y por otro lado funcional, pues los nuevos productos hacen difícil su clasificación como instrumentos o servicios financieros), el uso de tecnología más sofisticada y la innovación de nuevos productos, hacen necesaria la asignación de recursos importantes en el manejo y medición del riesgo operativo (Feria y Samaniego, 2004; Padoa-Schioppa, 1998).

Dada la presencia de riesgos en el sector financiero, la correcta identificación, gestión y medición de ellos trae como consecuencia estabilidad y eficiencia en la asignación de recursos de las empresas de la economía. Por ejemplo, el sistema bancario ejerce una importante influencia sobre varios sectores de la economía, ya que si empieza a fallar, se produce una interrupción del flujo de crédito o fallas en la asignación de recursos de manera eficiente (Moreno, 2004).

Como muestra cuantitativa, en el año 2002 el Comité de Basilea realizó un estudio de 89 bancos internacionales y encontró pérdidas por USD\$1,700 millones entre fraudes internos y externos (CEO Argentina, 2007).

El acuerdo de *Basilea II* no sólo es la búsqueda de cumplimiento de reglas por parte de las entidades financieras, sino pretende incentivar un estándar de mayor calidad en la gestión y control de riesgos y capital. La gestión del riesgo operativo es ahora una práctica constante y tan importante como la gestión del riesgo crediticio o del mercado.

Cuando se analiza el riesgo operativo, no sólo se trata de mediciones estadísticas de distintas distribuciones de pérdidas, es decir, de análisis con datos históricos, sino también del estudio de posibles escenarios. En concreto, se refiere a “incluir el uso de datos internos, datos externos relevantes, análisis de escenarios y sistemas de control interno” (Shevchenko, 2006).

En la gestión del riesgo operativo es necesaria la inclusión del juicio del experto, el cual también organiza por prioridades las actividades para la mejora, debido a las diversas fuentes situaciones en las que se encuentra este riesgo. Algunos ejemplos son: fraude interno; fraude externo; relaciones laborales; negligencia o fallas involuntarias con clientes; posibles daños a activos fijos; fallas tecnológicas; y fallas de ejecución de procesos (*Universia Business Review*, 2005).

1. Riesgo operativo

1.1 Definiciones

Riesgo operativo se define como el riesgo de pérdida debido a las deficiencias o a fallas de los procesos, el personal y los sistemas internos, o bien a causa de acontecimientos externos. El tipo y frecuencia de eventos que abarca es muy diverso.

Esta definición incluye el riesgo legal, pero excluye el estratégico y el de reputación.

Del riesgo operativo se pueden destacar las siguientes características: el riesgo operativo es el más antiguo de todos y está presente en cualquier clase de negocio y casi en toda actividad; es inherente a toda actividad en que intervengan personas, procesos y plataformas tecnológicas; es complejo, como consecuencia de la gran diversidad de causas que lo originan; y las grandes pérdidas que ha ocasionado a la industria financiera muestran el desconocimiento que de él se tiene y la falta de herramientas para gestionarlo.

Es conveniente indicar en este punto la principal diferencia relevante para el modelado del riesgo: en tanto que en el riesgo operativo las pérdidas ocurren durante una ventana dada, en el riesgo legal aparte de los eventos esperados que suceden con determinada frecuencia (para cuyos parámetros utilizamos información histórica), existen eventos en curso (demandas) cuya conclusión en pérdida es incierta, pero incluye una probabilidad de que suceda.

Por otro lado está la severidad de la pérdida, en este caso tenemos una situación parecida al riesgo de crédito, es decir, se tiene un monto expuesto inicial (monto demandado) y una pérdida final (resolución de la situación). La pérdida final se evalúa como pérdida económica, esto es, incluye gastos de juicio y otros gastos relacionados con la obtención de la resolución, incluidos los gastos de mantenimiento en caso de estar involucrado un bien que lo requiera.

Finalmente, existen montos con reclamo propio y montos con reclamo en contra, etcétera.

1.1.1 Riesgo operativo significativo

Es un riesgo que por su importancia tiene un impacto potencial adverso (cualitativo o cuantitativo) en: asegurar la existencia de un negocio en marcha; consecución de objetivos; alcanzar metas de rentabilidad; mejorar la competitividad y productividad; y mantener y mejorar reputación.

Los riesgos operativos significativos pueden terminar en verdaderos desastres que amenacen la misma existencia de la entidad.

Riesgo operativo intrínseco

Es un riesgo que se deriva de la realización de las actividades propias de la entidad. Está implícito en la actividad que realizamos. Es medible, gestionable y mitigable.

Mitigación del riesgo operativo

Es la parte del riesgo intrínseco con posibilidad de ser eliminado: mediante mejoras en procesos; modernización de sistemas y equipos; y aseguramiento contra ciertos eventos (robo, fallas en sistemas, fenómenos naturales, etc.).

Riesgo operativo residual

Es el remanente y es el que se manifiesta en forma de eventos de pérdidas. El objetivo de la administración de riesgos debe ser minimizar el riesgo residual.

La mitigación es la medida más eficiente contra el riesgo operativo. No todas las acciones de mitigación tienen un beneficio asignable de forma inmediata, pero otras sí, como los seguros.

$$\text{Riesgo operativo intrínseco} - \text{Mitigación} = \text{Riesgo operativo residual}$$

De lo anterior se deriva que existirán pérdidas brutas y pérdidas netas. Esto trae a discusión si se deben utilizar unas u otras para modelar el riesgo. De hecho se pueden seguir ambos caminos:

- 1) Modelar pérdidas brutas: en tal caso se debe hacer el cálculo de la severidad de pérdida, restando pagos por cobertura (mitigación del riesgo) y sumando costos y gastos.
- 2) Modelar pérdidas netas: por neto se debe entender no sólo por la deducción de la mitigación (por ejemplo, pago del seguro, pago del daño en caso legal), sino la inclusión del costo (el pago de primas y deducibles, gastos de juicio y demás).

En uno y otro casos el resultado es el mismo, pero cuando se trabaje con pérdidas netas se debe estar seguro de haber incluido los beneficios de la mitigación pero también sus costos.

Por otro lado, las series históricas de pérdidas se registran a valor histórico, y se requieren series largas en tiempo para capturar eventos escasos, pero el análisis debe hacerse a valor presente (pérdida económica) cercano a la fecha de análisis para dimensionar mejor las pérdidas pasadas.

Además de lo anterior, se debe tener en cuenta que en el caso de riesgo legal, el concepto de pérdida económica es más relevante, debido a que: la ventana del evento suele ser larga; a lo largo del evento se suceden gastos y costos legales y de otro tipo; y los rezagos en el cobro de seguros y demás beneficios también aconsejan el uso del valor presente.

1.2 Gestión

La administración de riesgo operativo incluye su modelado y su gestión, este artículo pone más énfasis en el modelado del riesgo. Sólo como referencia se debe comentar que la obtención de información no es sencilla y que la gestión tiende a modificar el tamaño y la frecuencia de las pérdidas en el tiempo.

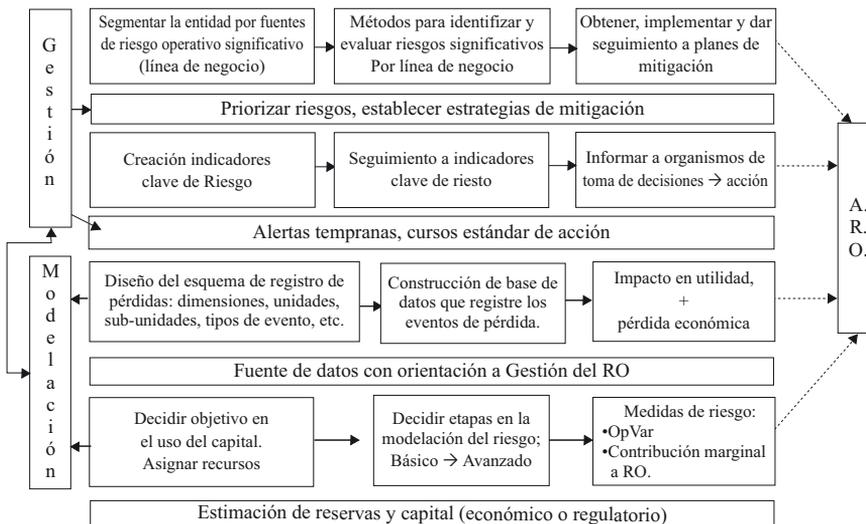
Las siguientes cuestiones introducen a los problemas que han de ser resueltos para construir una base de datos sólida a partir de la cual se pueda modelar el riesgo, y establecer las estrategias de seguimiento y administración de este riesgo:

- 1) ¿Quién identifica los riesgos?
- 2) ¿Cuál va a ser el mapa de riesgos: líneas de negocio y eventos de pérdida?

- 3) ¿Cuál es la definición de ventana del evento?, es decir ¿cuándo se considera que un evento ha sucedido y concluido?, ¿pérdidas en diferentes tiempos deben ser acumuladas en un solo evento?
- 4) La definición de evento, acumulación de pérdidas asociadas a un mismo evento y ventana de evento se vuelven relevantes.
- 5) ¿Se registran sólo los eventos que efectivamente terminan en pérdida?
- 6) ¿Todas las pérdidas son registrables?
- 7) ¿Quién identifica y reporta las pérdidas?
- 8) ¿Quién construye la base de datos de pérdidas, quién la valida?
- 9) ¿Qué controles aseguran que toda pérdida es reportada y clasificada adecuadamente?
- 10) ¿Debe ser modificado el esquema contable para clasificar pérdidas?
- 11) ¿Quién decide qué riesgo debe ser mitigado?
- 12) ¿Quién establece los planes de acción?
- 13) ¿Quién da seguimiento a los planes de mitigación?
- 14) ¿Quién construye los modelos de administración del riesgo operativo?
- 15) ¿Qué cambios en la estructura de control y reporte deben ser implementados como resultado de las pérdidas observadas y de los parámetros de riesgo obtenidos?

Un ejemplo de esquema global de la gestión del riesgo operativo es el siguiente:

Diagrama 1
Gestión del riesgo operativo



1.3 Problemas en el modelado

La regulación propuesta en el Acuerdo de Capitalización de *Basilea II* de junio de 2004, para el cálculo de capital en los bancos, ha ido filtrándose a las regulaciones locales, poniendo a las instituciones financieras ante el reto real de implementar estas metodologías. Ya la implementación del proceso de sistematizar el registro y clasificación de las pérdidas de tipo operativo implica cambios sustanciales en las organizaciones; el modelado de este tipo de riesgo es aún más complejo, actualmente no hay estándares para su medición, es un campo que continuamente ofrece novedades en soluciones pero también abre problemas nuevos.

La regulación existente ha tratado de ser conservadora, pero aplicar tal conservadurismo implica un costo para las instituciones, mientras más sencillo y fácil de implementar el método, más caro en costo de capital. Existen las siguientes opciones (de las simples a las complejas): indicador básico; método estándar; método estándar alternativo; y modelos avanzados (AMA).

En México únicamente están regulados los dos primeros, no obstante es de esperar que conforme avance la gestión del riesgo operativo se haga lo propio hacia los siguientes modelos. Los enfoques a que se hacer referencia en este artículo se inscriben en los AMA.

Dependiendo del riesgo de cada entidad, que en el caso de riesgo operativo está definido por sus estructuras de control y las plataformas tecnológicas utilizadas, cada enfoque puede implicar un menor costo de capital, sin embargo su complejidad en el modelado aumenta mucho cuando se trata de los modelos avanzados y exige la solución de problemas nuevos.

AIGOR Problemas en el modelado del riesgo operativo e implicaciones prácticas

El enfoque de modelos avanzados tiene importantes incentivos por sus beneficios en gestión y asignación de capital, no obstante es el que más retos implica. El Comité de Basilea constituyó el AIGOR (Grupo de implementación de riesgo operativo para modelos avanzados, por sus siglas en inglés) mismo que se enfoca en los retos prácticos ligados a la implementación de este tipo de riesgo, especialmente en lo tocante a los modelos avanzados.

En el documento denominado *Observed range of practice in key elements of Advanced Measurement Approaches* del AIGOR (2006), se señalan entre otros, tres problemas que tienen que ver con el modelado del riesgo operativo: granularidad, dependencia y supuesto de distribución de pérdidas y estimación. Estos tres problemas son abordados en este artículo desde la óptica de la teoría de valores extremos en su modalidad multivariada.

Cuadro 4

Clasificación del grupo de jóvenes que no asiste a la escuela (según nivel de instrucción)

<i>Problema</i>	<i>Descripción</i>
Granularidad	<p>“El sistema de medición de riesgo del banco debe ser suficientemente ‘granular’ para capturar los principales factores clave del riesgo operativo que afectan la forma de la cola de las estimaciones de pérdida” (AIGOR, 2006: párrafo 669c).</p> <p>“Las medidas de riesgo para diferentes estimaciones de riesgo operativo deben ser sumadas con el propósito de calcular el requerimiento de capital regulatorio mínimo. (...) El banco debe validar sus supuestos de correlación utilizando técnicas cuantitativas y cualitativas adecuadas” (AIGOR, 2006: párrafo 669d)</p>
Dependencia (correlación)	<p>“Es también posible considerar estructuras de dependencia más generales, para la cuales la correlación es diferente entre la cola y el cuerpo de la distribución y varía dentro de la cola. Estructuras complejas de dependencia que suponen altas dependencias en eventos de riesgo operativo en la cola son particularmente importantes y podrían conducir a resultados de requerimiento de capital por riesgo operativo que son mayores que cuando se hace el supuesto de correlación de 100%, aun cuando estos resultados no son probables para propósito de capital regulatorio” (AIGOR, 2006).</p> <p>“Dada la continua evolución de los enfoques analíticos para el riesgo operativo, el Comité no especifica supuestos a ser utilizados respecto a un enfoque o distribución para generar las medidas de riesgo operativo con propósito de determinar el capital regulatorio. Sin embargo el banco debe ser capaz de demostrar que su enfoque captura eventos de pérdida en la cola potencialmente severos. (...)” (AIGOR, 2006: párrafo 667).</p>
Técnica empleada (supuesto de distribución y estimación)	<p>“El rango de distribuciones supuestas para modelar la severidad del riesgo de pérdidas operativas es diverso, (...) Las distribuciones usadas incluyen las distribuciones generalizada de Pareto de la teoría de valores extremos, distribuciones empíricas, distribuciones lognormales, distribuciones de colas pesadas y distribuciones de colas ligeras” (AIGOR, 2006).</p>

Fuente: Elaboración propia.

Es de notar que la distribución generalizada de Pareto (DGP) referida es generalmente la versión univariada.

2. Marco básico de modelado

2.1 Marco general

Al enfoque que se sigue en este documento para medir el riesgo operativo se denomina *Loss Distribution Approach* (LDA) o Enfoque de distribución de Pérdidas. La metodología modela en forma separada el componente de las pérdidas referido

a la frecuencia de los eventos por unidad de tiempo (frecuencia), del componente que modela el tamaño de la pérdida (severidad de pérdida) cada vez que hay un evento.

Bajo este enfoque la pérdida total se obtiene al relacionar el componente de frecuencia con el de severidad. Esta perspectiva ya es un estándar en el uso de las distribuciones de valores extremos para modelar la severidad de pérdida. En lo que se expone a continuación se sigue la notación de Böcker y Klüppelberg.

Para el enfoque de *Point process* descrito también en esta parte se siguen los textos de Embrechts, Klüppelberg y Thomas (2003: c. 5) y Degen (2006, Apéndice B).

Proceso de severidad de pérdida

Se suponen variables aleatorias positivas, independientes e idénticamente distribuidas, que se utilizan para representar el tamaño de las pérdidas en cada evento.

Se requiere una distribución de probabilidad que modele estos valores. Las distribuciones que mejor se ajustan a los eventos de pérdidas operativas son las que tienen colas pesadas.

Point process o procesos de punto

Este tipo de procesos “dan una vista interna de la estructura de variables límite y procesos límite que ocurren en la teoría de la suma (...), en la teoría de valores extremos (...) y en el análisis de series de tiempo (...)” (Embrechts, Klüppelberg y Thomas, 2009: 219).

Para una distribución aleatoria de puntos X_k en el espacio de estado E , podemos pensar en una medida de punto m en $B \in \beta(E)$ simplemente como una medida de conteo, por ejemplo $m(B)$ cuenta el número de puntos X_i que caen en el conjunto $B \in \beta(E)$. Por tanto $m(B)$ es una variable aleatoria

Similar a la definición de proceso estocástico, el cual es familiar en variables aleatorias indexadas por el tiempo, un proceso de punto N con estado de espacio E , puede ser pensado como una colección de medidas de punto, indexadas por los conjuntos $(N(A))_{A \in \beta(E)}$ (Degen, 2006: Apéndice B).

Un ejemplo de proceso de punto es el de los excedentes sobre un umbral, que en el espacio de estado $(0, 1]$ cuenta el número de excesos sobre un umbral u que tiene una secuencia X_1, \dots, X_n .

$$N_n(\bullet) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{kn^{-1}}(\bullet) I_{\{X_k > u\}} \quad i = 1, 2, \dots$$

Los procesos de punto más importantes son aquellos para los cuales $N(A)$ se distribuye como una Poisson.

Renewal counting process o proceso de conteo renovado

De acuerdo con Embrechts, Klüppelberg y Thomas (2003): “Sea (Y_i) una secuencia de variables aleatorias iid, $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $n \geq 1$ ”, para el proceso de punto se tiene que su espacio de estado es $N(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{T_i}(A)$, $A \in E$, $E = [0, \infty]$. Cuando $A = [0, t]$, entonces $N(t) = N[0, t]$, $t > 0$.

“En este sentido, cada proceso de conteo renovado corresponde a un proceso de punto. El proceso de punto definido de esta manera es simple ya que $0 < T_1 < T_2 < \dots$ con probabilidad 1” (Embrechts, Klüppelberg y Thomas, 2003).

En el caso del riesgo operativo, cada periodo para observar o registrar eventos de pérdida puede ser considerado como un proceso de conteo renovado. Por ejemplo, si los eventos se observan o registran en forma mensual, el número de eventos se registrarán con dicha periodicidad, cada nuevo periodo inicia un nuevo conteo de eventos.

Proceso de conteo-frecuencia del evento de pérdida operativa

Se refiere al número de eventos de pérdida operativa por intervalo de tiempo $[0, t]$ para $t > 0$, se supone también que este número de eventos se trata de una variable aleatoria. A estos procesos se les llama en forma simple procesos de conteo $(N(t))_{t > 0}$, los cuales son generados por una secuencia de puntos $(T_n)_{n > 0}$ de variables aleatorias no negativas, donde: $0 \leq T_1 \leq T_2 \dots$ a.s.; y $N(t) = \sup\{n \geq 1: T_n \leq t\}$, $t \geq 0$.

El supuesto tradicional, y que se sigue también aquí, indica independencia entre los procesos de frecuencia y de severidad de pérdida.

En riesgo operativo hay dos distribuciones que se suelen utilizar más a menudo: primero (abrumadoramente) la Poisson y en segundo lugar la binomial negativa.

En el primer caso $(N(t))_{t > 0}$ es un proceso homogéneo con intensidad $\lambda > 0$, donde:

$$P(N(t) = n) = p_1(n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n \in N_0$$

Es conocido que la intensidad de la Poisson es igual a su media y su varianza. En cambio la distribución binomial negativa se utiliza cuando hay más dispersión (varianza) en el número de eventos.

Esta distribución es una mezcla *gamma* de una distribución Poisson en la cual el parámetro λ es una variable aleatoria y no una constante.

Esto permite modelar sobre dispersión, lo cual significa que para toda $t > 0$, la varianza de $N(t)$ es mayor que su media, en tanto que en la distribución de pérdidas Poisson $\text{var}(N(t)) = E[N(t)]$. De cualquier manera en lo que concierne al VaR operativo, la sobre dispersión es de menor importancia (Böcker y Klüppelberg, 2005).

En la medición de riesgo operativo se suele seguir el enfoque de modelar por un lado las frecuencias de las pérdidas y por otro las severidades de pérdida. Aunque este artículo trata fundamentalmente de las severidades, es necesario comentar, en aras de la integridad del tema, que el riesgo operativo exhibe una gran dispersión en la frecuencia de los eventos, algunos pueden suceder a diario, otros cada semana o mes, sin existir necesariamente regularidad, estas asociaciones entre tipo de evento/frecuencia/severidad varían según la naturaleza de la entidad o institución.

Es necesario considerar que el uso de modelos de valores extremos, centrados en la distribución de la cola, requiere tomar en cuenta la frecuencia de la ocurrencia de valores extremos. En particular, para el modelo DGP ya que esta distribución existe a partir de un umbral dado, es necesario saber con qué frecuencia las observaciones exceden tal umbral y modelar en consecuencia.

Es común el supuesto de considerar la frecuencia de los eventos independiente de la severidad de pérdida, en lo sucesivo los autores se atienen a este supuesto.

2.2 Investigación reciente

Recientemente las investigaciones en riesgo operativo han confirmado la existencia de correlaciones de importancia, asimismo se ha empezado a avanzar en los modelos multivariados con correlación o dependencia. Los enfoques que los autores han identificado son:

- 1) Modelado de cuerpos Log-normales (para pérdida esperada) con GDP para colas. Incluyendo correlación –efecto diversificación–.
- 2) Uso de cópulas de teoría de valores extremos. Uso de cópula t , marginales GDP estructura de dependencia con cópulas t y empírica.

- 3) Escenarios multivariados con cópula gaussiana obteniendo distribuciones Poisson multivariadas.
- 4) Modelado de la estructura de dependencia de las diferentes unidades de riesgo vía el nuevo concepto de cópula de Lévy.
- 5) Estimación por máxima verosimilitud de un modelo estadístico multivariado, modela con distribuciones de valores extremos cuando los datos lo sugieren, estimando por análisis de escenarios y eliminación de *outliers* de las distribuciones marginales y dependencia con cópulas.

En fechas recientes ha florecido la investigación en el campo del riesgo operativo y los valores extremos. Varios investigadores especializados en teoría de valores extremos (Embrechts, Klüppelberg y Thomas, 2003; Falk y Reiss, 2003; Falk, Reiss y Hüsler, 2004; Falk y Rene, 2006; Chávez-Demoulin, Embrechts y Nelehová, 2006) han sido atraídos al análisis de problemas en la medición del riesgo operativo por la naturalidad con la cual encaja con la teoría, realizando contribuciones importantes; éstas van desde la agregación de las pérdidas, al uso de distribuciones para modelar las frecuencias, pasando por el tratamiento de datos, enfoques multivariados distintos, hasta abordar de lleno el cálculo del valor en riesgo y la esperanza condicional de la cola.

3. Tratamiento de las severidades

3.1 Teoría de valores extremos

En general hay dos técnicas para modelar valores extremos. La primera se denomina máxima por bloques, implica recoger sólo las mayores observaciones para un periodo dado, suponiendo grandes muestras idénticamente distribuidas. El método discrimina una gran cantidad de datos y está relacionada con las Distribuciones Generalizadas de Valores Extremos (DVE), cuya forma estándar está dada por:

$$G_{\gamma}(X) = e^{-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}} \quad 1 + \gamma x > 0 \quad \gamma \neq 0$$

Donde:

- Si $\gamma = 0$, la distribución es Gumbel estándar;
- Si $\gamma > 0$ la distribución es Fréchet; y
- Si $\gamma < 0$, la distribución es Weibull.

La segunda se denomina excesos sobre un umbral, en la cual se modelan todas las observaciones grandes que exceden un umbral dado (generalmente alto), el método discrimina menos datos (de por sí escasos) y se considera muy útil en aplicaciones prácticas. Están relacionados con las DGP, cuya forma estándar está dada por:

$$W_\gamma(x) = 1 - (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}$$

Donde:

- Si $x > 0$ y $\gamma = 0$, la distribución es exponencial;
- Si $x > 0$ y $\gamma > 0$, la distribución es Pareto; y
- Si $0 < x < (1/|\gamma|)$ y $\gamma < 0$, la distribución es Beta.

Es necesario resaltar tres aspectos:

- 1) Los dos métodos se centran en una parte de la distribución (la cola), no en toda. El modelado de lo que no es valor extremo se puede hacer por otros métodos más sencillos.
- 2) Se puede notar que existe una relación sencilla y directa entre las DVE y las DGP: $W_\gamma(x) = 1 - \log G(x)$ si $\log G(x) > -1$.
- 3) El teorema de Pickands-Balkema-De Hann establece que es posible encontrar una función positiva y medible dados parámetros de forma, localización y escala, tal que: $|F^{[u]}(x) - W_{\gamma, \mu, \sigma_u}(x)| \rightarrow 0$, $u \rightarrow \omega(F)$, si y solo si F pertenece al dominio de atracción del máximo.

Así, la distribución máxima normalizada que converge a una DVE constituye un grupo de distribuciones para las cuales la distribución de los excesos converge a una DGP cuando el umbral se incrementa. Más aun “El parámetro de forma de la DGP límite para los excesos es el mismo parámetro de forma que para la distribución DVE límite para el máximo” (Mc Neil *et al.*, 2005).

Es muy posible que cuando en un fenómeno existan observaciones extremas, buscando un umbral suficientemente alto, la cola tenderá a ajustarse a una DGP.

3.2 Severidades: DVE y DGP univariadas

El empleo de distribuciones univariadas, de valores extremos y generalizada de Pareto, para modelar la severidad de pérdida en eventos de riesgo operativo ha sido abordada ampliamente en varias investigaciones. Una de las más sobresalientes es

la de Moscadelli (2004), quien tuvo el privilegio de contar con la base de datos de 89 bancos, e incluyó más de 47,000 observaciones clasificadas por tipo de evento y línea de negocio. Dado que el interés de este artículo es en los modelos multivariados, solamente se resaltarán los siguientes elementos de su investigación:

- 1) Bajo desempeño de los modelos de severidad actuariales convencionales para describir las características de los datos, sobre todo debido al sesgo y curtosis exhibidos. “(...) tienden a ajustar a las observaciones centrales, y en consecuencia a no tomar en adecuada consideración las pérdidas grandes” (Moscadelli, 2004: 12).
- 2) En contraste, mostró que la teoría de valores extremos en su versión excesos sobre un umbral-DGP (POT-DGP) “(...) provee un estimado preciso de la cola de las líneas de negocio a los percentiles 95 y mayores, esto es confirmado por los resultados de tres pruebas de bondad de ajuste y análisis de desempeño del VaR de la severidad” (Moscadelli, 2004: 12).
- 3) En los resultados del VaR de la severidad Moscadelli encuentra que a diferentes niveles de confianza (95, 97.5, 99, 99.95 y 99.9%) el POT-DGP es el que menores excepciones exhibe en las pruebas *back test*, comparado con los modelos Gumbel y Log-normal.
- 4) Las líneas de negocio “Finanzas corporativas” y “Banca Comercial” resultaron ser las más riesgosas para la muestra utilizada, en tanto que las de “Banca de Menudeo” y “Operaciones Bursátiles al Menudeo” son las menos riesgosas. El menor riesgo se encuentra en las líneas de negocio menos concentradas.
- 5) Los resultados denotan que las pérdidas por riesgo operativo son en efecto una fuente de riesgo importante para los bancos.
- 6) El consumo de capital que encuentra Moscadelli para cada línea de negocio es en cuatro casos inferior al que implica el uso de los multiplicadores del modelo estándar de *Basilea II* para riesgo operativo, existiendo por tanto un beneficio en el uso de los modelos avanzados. En los otros cuatro casos el consumo es mayor, sin embargo es notable que para los cuatro en los cuales el consumo es menor, se acumula 72% del cargo de capital, de tal manera que en forma consolidada resulta un coeficiente de 13.3 contra 15% del modelo estándar de *Basilea II*.

Nótese que la investigación de Moscadelli fue realizada bajo el supuesto de distribuciones univariadas. Los conceptos de dependencia están ausentes en las estimaciones realizadas.

3.3 Severidades: DVE y DGP multivariadas

3.3.1 Antecedentes

Para utilizar los modelos de distribuciones DVE y DGP en sus dimensiones: univariada, bivariada, trivariada y multivariada, se debe contar con metodologías para:

- 1) Estimar los parámetros de forma, localización y escala (modelos paramétricos).
- 2) Verificar la bondad del ajuste a la distribución, dados los parámetros encontrados.
- 3) Formas cerradas para estimar cuantiles de la distribución encontrada o técnicas de simulación para generar variables aleatorias bajo los parámetros determinados.

Cuando se trata de dos o más dimensiones se añaden las metodologías siguientes para:

- 1) Estimar funciones que determinen las relaciones de dependencia entre las variables (cópulas o semi-cópulas).
- 2) Estimar los parámetros de las distribuciones marginales y los parámetros de dependencia entre éstas.
- 3) Obtener fórmulas cerradas para generar variables aleatorias con dependencia (casos bivariado y trivariado).
- 4) En su caso, desarrollar métodos de simulación para generar variables aleatorias, dada la relación de dependencia obtenida.
- 5) Escalar las variables simuladas con los parámetros de escala, forma y localización.
- 6) Transformar las variables obtenidas en las variables de estudio (pérdidas operativas por ejemplo) y generar sus medidas de riesgo.

Casos bivariado y trivariado

Para el caso bivariado y en algunos casos trivariado hay varios modelos desarrollados e implementados en diferentes programas, Stephenson en su programa *Extreme Value Distributions* (EVD), incluye para nueve modelos bivariados de DVE: cálculo de densidad y de la densidad angular; obtención de parámetros de modelos de cópulas condicionales para modelar dependencia; estimación de parámetros; y obtención de simulaciones

Caso multivariado

Para el caso multivariado, hay principalmente dos investigaciones que abordan la estimación de parámetros y simulación multivariada de los modelos de la teoría de valores extremos. La primera es la de Stephenson para el caso de DVE, en su programa incluye cálculo de distribución, densidad y obtención de simulaciones para los modelos Log y Log anidado. La segunda es la de Michel para el caso de DGP, quien provee algoritmos para estimar parámetros y realizar simulaciones de los modelos logístico y logístico anidado, además del código en *Mathematica* para la realizar simulaciones.

Comparten los modelos DVE y DGP multivariados que estudian Stephenson y Michel las siguientes características:

- 1) Las variables de pérdida sufren las siguientes transformaciones:

Variable empírica →

Estandarización en términos de la marginal paramétrica →

Transformación a variables exponenciales negativas

- 2) Utilizan la descomposición espectral que consiste en transformar la serie de variables en componentes (angular y radial) equivalentes a una representación polar, y donde los componentes angulares son la materia prima para los diferentes modelos, estimación de parámetros y simulación de variables.
- 3) Distribuciones marginales paramétricas univariadas.
- 4) Modelos Log y Log asimétrico:
 - a) Log: parámetro de dependencia único (constante).
 - b) Log asimétrico: parámetros de dependencia diferentes y parámetros de asimetría. Con número elevado de parámetros.
- 5) Su espacio probabilístico se encuentra en el Simplex unitario.
- 6) Existencia de algoritmos de simulación implementados para los modelos logístico y logístico asimétrico.
- 7) La existencia de modelos logísticos anidados con diferentes parámetros de dependencia. Modelos más complejos de implementar por expresiones involucradas.
- 8) Ambos apuntan que los algoritmos de simulación que presentan se pueden modificar para aceptar el logístico anidado.

- 9) Las simulaciones entregan resultados en forma de cuantiles marginales relacionados por los parámetros de dependencia de la distribución conjunta.
- 10) Los cuantiles se convierten en variables de pérdida con las transformadas inversas de las distribuciones marginales.

Es conveniente señalar las características que dan la relevancia a los modelos logísticos en la posibilidad de obtener medidas de riesgo operativo:

- 1) Log: de manejo sencillo para cualquier dimensión, con la desventaja de suponer un parámetro de dependencia constante. Como se comentó, tanto Stephenson como Michel proveen algoritmos específicos de simulación. El modelo es útil en riesgo operativo si se encuentra un parámetro de dependencia muy similar en el conjunto de variables a modelar.
- 2) Log asimétrico: permite el manejo de diferentes parámetros de dependencia, pero requiere asimismo muchos parámetros de asimetría. El número de parámetros requerido lo hace inmanejable para muchas variables. Tanto Stephenson como Michel proveen algoritmos específicos de simulación.
- 3) Log anidado: permite representar las dependencias relevantes entre variables, utilizando $d-1$ parámetros de dependencia. El modelo deriva en expresiones complejas. Tanto Stephenson como Michel indican que es factible trabajar con estos modelos a pesar de su complejidad. El trabajo de Stephenson provee una indicación muy general para DVE; el de Michel ofrece soluciones tanto en la simulación de variables como en la estimación de parámetros que se pueden adaptar a las versiones multivariadas del Log. Por sus características el modelo puede ser de mucha utilidad para modelar el riesgo operativo.

El modelo Log anidado es un modelo DGP de tipo jerárquico que va construyendo la dependencia entre variables en forma recursiva: se determina la dependencia entre dos variables, después la de estas dos con una tercera, luego la de las tres con una cuarta, etcétera.

Las ecuaciones para la DGP multivariada, con modelo logístico anidado, para dimensiones 2 a 5 son:

$$d = 2 : \quad W_{\lambda_1}(x_1, x_2) = 1 - \left((-x_1)^{\lambda_1} + (-x_2)^{\lambda_1} \right)^{1/\lambda_1}$$

$$d = 3 : \quad W_{\lambda_1, \lambda_2}(x_1, x_2, x_3) = 1 - \left(\left((-x_1)^{\lambda_1} + (-x_2)^{\lambda_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1} + (-x_3)^{\lambda_2} \right)^{1/\lambda_2}$$

$$d = 4 : \quad W_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - \left(\left(\left((-x_1)^{\lambda_1} + (-x_2)^{\lambda_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1} + (-x_3)^{\lambda_2} \right)^{\lambda_3/\lambda_2} + (-x_4)^{\lambda_3} \right)^{1/\lambda_3}$$

$$d = 5 : \quad W_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1 - \left(\left(\left(\left((-x_1)^{\lambda_1} + (-x_2)^{\lambda_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1} + (-x_3)^{\lambda_2} \right)^{\lambda_3/\lambda_2} + (-x_4)^{\lambda_3} \right)^{\lambda_4/\lambda_3} + (-x_5)^{\lambda_4} \right)^{1/\lambda_4}$$

Este modelo permite diferentes grados de dependencia entre los componentes del vector aleatorio subyacente, ofrece un campo amplio de oportunidad en la investigación de su aplicación al riesgo operativo. Las investigaciones actuales no lo abordan con toda la profundidad de los primeros. Las dificultades en la obtención de expresiones de la densidad angular y las asociadas para dimensiones elevadas limita el uso del modelo para portafolios o problemas financieros de muchas variables, pero lo hace idóneo para modelar situaciones de número limitado de variables, tal como en el caso del riesgo operativo, en el cual las características de las variables permiten suponer independencia con respecto a diferentes líneas de negocio, no obstante diferentes niveles de dependencia entre eventos dentro de las líneas de negocio; y además en número reducido de variables de pérdida a modelar.

En el Cuadro 2 se muestra lo que se tiene disponible y no para generar variables aleatorias de valores extremos.

Cuadro 2
DVE: metodologías existentes para utilizar los modelos en diferentes dimensiones

<i>Metodología</i>	<i>Univariado</i>	<i>Bivariado</i>	<i>Multivariado</i>
Estimar los parámetros de forma, localización y escala.		DVE y DGP: existen	DVE y DGP: existen, mismos que para las distribuciones marginales
Pruebas para verificar la bondad del ajuste a la distribución, dados los parámetros encontrados.	DVE y DGP: existen	DVE y DGP: no hay	DVE: no hay DGP: Michel (2005)
Formas cerradas para estimar cuantiles de la distribución encontrada o métodos de simulación para generar variables aleatorias bajo tales parámetros.	DVE y DGP: existen		DVE: Stephenson (2003) DGP: Michel (2005)
Estimar funciones que determinen las relaciones de dependencia entre las variables (cópulas).		DVE y DGP: existen	
Estimar los parámetros de dependencia.			
Obtener fórmulas cerradas para generar variables aleatorias con dependencia.	DVE: NA		DVE: NA DGP: NA
O en su caso desarrollar métodos de simulación para generar variables aleatorias, dada la relación de dependencia obtenida.	DGP: NA	DVE: existe DGP: no existe	DVE: Stephenson (2003) DGP: Michel (2005)
Escalar las variables simuladas con los parámetros de escala, forma y localización.		DVE y DGP: existen	DVE y DGP: existen

Simulación

La simulación de variables es necesaria para modelar riesgo operativo ya que se ha aceptado el supuesto de comportamiento multivariado y la relevancia de los parámetros de dependencia, Michel (2006, 2006b, 2006c, 2006d, 2006e, 2006f, 2001) plantea que hay relativamente pocos trabajos que tratan la simulación de distribuciones de valores extremos multivariadas, este autor hace los siguientes comentarios:

- 1) Tajvidi (1996) señaló la necesidad de tales simulaciones.
- 2) Falk, Hüsler y Reiss (2004) simulan la Marshal-Olkin DGP bivariada.
- 3) Reiss y Thomas (2001) desarrollan técnicas para simular modelos DVE bivariados: Marshal-Olkin y Hüsler-Reiss. Stephenson implementa los modelos Log, Log asimétrico, Husler- Reiss, Log negativo, Log Log, Log Log negativo, Coles-Tawn y asimétrico mixto.
- 4) La mayoría de los trabajos conocidos hoy en día tratan casos bivariados y trivariados.
- 5) Stephenson (2003) es la única fuente que aborda la simulación en DVE para n dimensiones. Sus algoritmos están implementados en el paquete en *R* (Ihaka y Gentleman, 1996) llamado EVD (Stephenson, 2002), y está disponible en (<http://www.maths.lancs.ac.uk/stephena/>).
- 6) La investigación de Michel (2006, 2006b, 2006c, 2006d, 2006e, 2006f) aborda por primera vez la simulación de DGP en dimensiones arbitrarias para los Log y Log asimétrico, y provee de algoritmos generales adaptables a otros modelos.

En lo referente a la estimación de funciones de dependencia, menciona que para el caso de las DVE, existe amplia literatura para la estimación del parámetro de dependencia en el caso bivariado (Michel lista al menos 13). En cuanto a dimensiones mayores, hace referencia a los trabajos de Tawn (1998), Coles y Tawn (1991), Joe, Smith y Weissman (1992), Coles y Tawn (1994), Coles, Heffernan y Tawn (1999), y Kotz y Naradajah (2000). Para DGP, Michel aplica varios métodos previamente utilizados en la estimación de parámetros de las DVE.

Michel señala que la razón por la cual la mayoría de los trabajos tratan el tema bivariado o a lo más trivariado es porque en teoría de valores extremos las cosas se complican al pasar de dos a tres dimensiones:

Esto se debe a que la función de dependencia de Pickands, que gobierna esos modelos, es una función univariada en el caso bivariado. Por tanto el paso de la dimensión 2 a la 3 es, para la función de dependencia el paso de la dimensión 1 a 2. Esto lleva a fórmulas más complicadas, y no toda aseveración válida en el caso bivariado, se sostiene para el caso trivariado (Michel, 2006).

3.3.2 Severidades: DVE Multivariadas

A pesar de que los algoritmos recopilados e implementados por Stephenson para DVE multivariada están disponibles en forma libre, no se han empleado para la

medición del riesgo operativo. Mucho menos se ha explorado el Log anidado, mismo que, como se apuntó, puede ser de gran importancia en la medición del riesgo operativo.

Stephenson (2003) se centra efectivamente sólo en los problemas de la simulación de las variables aleatorias mediante los Log y Log asimétrico, proponiendo para cada uno dos algoritmos. Al final de dicho trabajo se aborda el problema de la generalización de los modelos indicados, en particular el Log anidado con marginales Fréchet. El artículo concluye diciendo: “El modelo presentado aquí, incorpora solo un nivel de anidación. En teoría es posible construir y simular de una distribución logística de valores extremos formas que contengan cualquier número de niveles de anidación” (Stephenson, 2003: 58).

Los trabajos de Stephenson en torno a su EVD se refieren al uso del programa, sin embargo también aportan elementos teóricos de los diferentes modelos cuando es necesario.

3.3.3 Severidades: DGP Multivariada

Michel (2001, 2006) aborda problemas teóricos y prácticos de la DGP multivariada (DGPM). Sus investigaciones son exhaustivas, en ellas el practicante de la administración de riesgos financieros y los investigadores en otros campos encontrarán amplio material de utilidad. Con la intención de ahondar en aspectos prácticos, y en especial el modelado del riesgo operativo, son relevantes particularmente los siguientes temas: aspectos teóricos de los modelos Log, Log asimétrico y Log anidado; simulación de algoritmos para los dos primeros e indicaciones sobre cómo se puede abordar el tercero; y estimación de parámetros para el Log con mismo parámetro de dependencia y para el Log anidado con parámetros de dependencia distintos entre pares, en particular el método de máxima verosimilitud.

En su investigación, Michel (2006, 2001) hace uso de la descomposición espectral (también llamada angular) anotada arriba. No obstante, en la revisión de investigación previa no se encontró el uso directo de la descomposición angular (o espectral) de la DGP empleada para medir riesgo operativo.

El presente trabajo aprovecha las investigaciones de Michel sobre DGP y realiza las versiones necesarias para trabajar con variables financieras (suponiendo marginales Fréchet), centrándose en los modelos que permiten trabajar con mayor número de variables con diferentes niveles de dependencia entre sí (Log anidado) para modelar la probabilidad de ocurrencia de eventos catastróficos en forma conjunta.

DGP

Una DVE se define como:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_d) = \exp \left(\left(\sum_{i=1}^d x_i \right) D \left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^d x_i}, \frac{x_2}{\sum_{i=1}^d x_i}, \dots, \frac{x_d}{\sum_{i=1}^d x_i} \right) \right)$$

Los valores de x_i se encuentran en el cuadrante negativo del plano cartesiano, las distribuciones marginales son exponenciales negativas y la función D es llamada función de dependencia de Pickands:

$$D: \overline{R_{d-1}} \rightarrow [0,1]$$

Donde:

$$\overline{R_{d-1}} = \text{Simplex unitario cerrado en } R^{d-1}.$$

Si G_1, \dots, G_d son DVE univariadas, la transformación de una DVE con marginales exponenciales negativas, a las marginales G_1, \dots, G_d se puede escribir como:

$$G(x_1, \dots, x_d) = G(\log(G_1(x_1)), \dots, \log(G_d(x_d)))$$

Donde:

$$x_i \in \text{sup}(G_i) = \overline{\{x \in R \mid G_i(x) > 0\}}$$

Subyacente a la distribución G_i tenemos una distribución de valores extremos G_* .

Sea $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vector aleatorio con función de distribución W (DGP) y representación:

$$W(x) = 1 + \left(\left(\sum_{i=1}^d x_i \right) D \left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^d x_i}, \frac{x_2}{\sum_{i=1}^d x_i}, \dots, \frac{x_d}{\sum_{i=1}^d x_i} \right) \right)$$

$$W(x) = 1 + \log(G(x_1, \dots, x_n)) \quad (x_1, \dots, x_n) = x \in U$$

Lo anterior implica que en la vecindad U del θ , en el cuadrante negativo $(-\infty, 0)^d$, X sigue una DGPM con distribuciones marginales uniformes.

Descomposición angular

La transformación de Fréchet (T_F) permite descomponer las variables x en componentes similares a los de las coordenadas polares: en un componente angular (z_1, \dots, z_{d-1}) y uno radial (c), $z = (z_1, \dots, z_{d-1}, c)$, además implica que las distribuciones marginales de la DGPM son Fréchet, esto es relevante para los fenómenos financieros, pues representan mejor su patrón de comportamiento.

Para d perteneciente a los números naturales, T_F se define como:

$$(-\infty, 0)^d \setminus \{0\} \rightarrow R^{d-1} \times (-\infty, 0)$$

$$T_F(x) = \left(\frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^d x_i}}, \dots, \frac{\frac{1}{x_{d-1}}}{\frac{1}{\sum_{i=1}^d x_i}}, \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{d-1}} \right) = (z_1, \dots, z_{d-1}, c)$$

Siendo su inversa:

$$T_F^{-1}(z, c) = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_{d-1}}, \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{d-1} z_i} \right)$$

Ecuaciones para la densidad angular

Utilizando las transformaciones referidas es posible obtener las expresiones de la de densidad angular, mediante:

$$l_\lambda(z_1, \dots, z_{d-1}) = (-c)^{-d+1} \frac{1}{z_1^2} \dots \frac{1}{z_{d-1}^2} \frac{1}{\left(1 - \sum_{i=1}^{d-1} z_i\right)^2} \left(\frac{\partial^d}{\partial x_1 \dots \partial x_d} W(x_1, \dots, x_d) \right) (T_F^{-1}(z, c))$$

Expresión para $d = 3$:

$$\phi_\lambda(z_1, \dots, z_{d-1})$$

$$(\lambda 2 - 1) (z_1 * z_2)^{\lambda 1 - 1} (1 - z_1 - z_2)^{\lambda 2 - 1} (z_1^{\lambda 1} + z_2^{\lambda 1})^{\frac{\lambda 2}{\lambda 1} - 2} \left((z_1^{\lambda 1} + z_2^{\lambda 1})^{\frac{\lambda 2}{\lambda 1}} + (1 - z_1 - z_2)^{\lambda 2} \right)^{\frac{1}{\lambda 2} - 3}$$

$$\left((\lambda 1 - 2) (1 - z_1 - z_2)^{\lambda 2} + (\lambda 1 + \lambda 2 - 1) (z_1^{\lambda 1} + z_2^{\lambda 1})^{\frac{\lambda 2}{\lambda 1}} \right)$$

Expresión para $d = 5$, utilizando las siguientes ecuaciones:

$$R = -(1 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4)^{-1}; S = ((z_1^{-\lambda 1} + (z_2)^{-\lambda 1}); T = \left((S)^{\frac{\lambda 2}{\lambda 1}} + (z_3)^{-\lambda 2} \right); U = \left((T)^{\frac{\lambda 3}{\lambda 2}} + (z_4)^{-\lambda 3} \right)$$

$$V = \left((U)^{\frac{\lambda 4}{\lambda 3}} + (1 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4)^{\lambda 4} \right)$$

Obtenemos la expresión:

$$h(z_1, \dots, z_4) = (\lambda_4 - 1) (z_1 * z_2)^{-\lambda_1 - 1} (z_3)^{-\lambda_2 - 1} (z_4)^{-\lambda_3 - 1} (-R)^{\lambda_4 + 1} S^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 2}$$

$$T^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2} - 3} U^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3} - 4} V^{\frac{1}{\lambda_4} - 5} \left(U^2 V^2 \left(S^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - (z_3)^{-\lambda_2} \right) \lambda_2^2 \left((-R)^{\lambda_4} (\lambda_3 - \lambda_4) + U^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} (\lambda_3 + \lambda_4 - 1) \right) + \right.$$

$$V \left(2 S^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - (z_3)^{-\lambda_2} \right) \lambda_2 \left(V^2 \left(T^{\frac{2 \lambda_3}{\lambda_2}} - (z_4)^{-2 \lambda_3} \right) \lambda_3^2 + U V \left(2 T^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} - (z_4)^{-\lambda_3} \right) \lambda_3 \left(U^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} (\lambda_4 - 1) - (-R)^{\lambda_4} \lambda_4 \right) + \right.$$

$$\left. T^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} U \left(U^{\frac{2 \lambda_4}{\lambda_3}} (\lambda_4 - 1)^2 + (-R)^{2 \lambda_4} \lambda_4^2 - (-R)^{\lambda_4} U^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} \lambda_4 (4 \lambda_4 - 3) \right) \right) +$$

$$T U V \lambda_1 \left((-R)^{2 \lambda_4} \left((z_4)^{-\lambda_3} (\lambda_2 - \lambda_3) + T^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} (\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4) \right) (\lambda_3 - \lambda_4) + \right.$$

$$U^{\frac{2 \lambda_4}{\lambda_3}} (\lambda_3 + \lambda_4 - 1) \left((z_4)^{-\lambda_3} (\lambda_2 - \lambda_3) + T^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - 1) \right) +$$

$$\left. (-R)^{\lambda_4} U^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} \left((z_4)^{-\lambda_3} (\lambda_2 - \lambda_3) (2 \lambda_3 - 1) + T^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} (2 (\lambda_3 - 1) \lambda_3 + \lambda_2 (2 \lambda_3 - 1) + (3 - 4 \lambda_4) \lambda_4) \right) \right) +$$

$$S^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \left(V^3 \left(T^{\frac{2 \lambda_3}{\lambda_2}} - 4 T^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} (z_4)^{-\lambda_3} + (z_4)^{-2 \lambda_3} \right) \lambda_3^3 + V^2 \left(3 T^{\frac{2 \lambda_3}{\lambda_2}} - 7 T^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} (z_4)^{-\lambda_3} + (z_4)^{-2 \lambda_3} \right) \right.$$

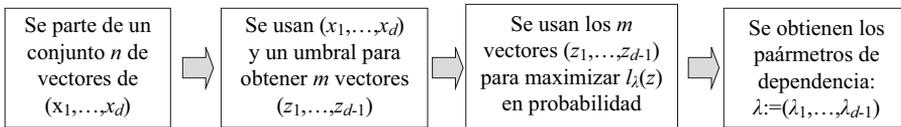
$$\lambda_3^2 \left(U^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} (-1 + \lambda_4) - (-R)^{\lambda_4} \lambda_4 \right) + 3 T^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} V \left(T^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} - (z_4)^{-\lambda_3} \right) \lambda_3$$

$$\left(U^{\frac{2 \lambda_4}{\lambda_3}} (\lambda_4 - 1)^2 + (-R)^{2 \lambda_4} \lambda_4^2 - (-R)^{\lambda_4} U^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} \lambda_4 (4 \lambda_4 - 3) \right) + T^{\frac{2 \lambda_3}{\lambda_2}} \left(U^{\frac{3 \lambda_4}{\lambda_3}} (\lambda_4 - 1)^3 - \right.$$

$$\left. \left. (-R)^{3 \lambda_4} \lambda_4^3 + (-R)^{2 \lambda_4} U^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} \lambda_4^2 (11 \lambda_4 - 7) - (-R)^{\lambda_4} U^{\frac{2 \lambda_4}{\lambda_3}} \lambda_4 (6 + \lambda_4 (11 \lambda_4 - 16)) \right) \right) \right)$$

Estas ecuaciones son necesarias para obtener los parámetros de dependencia de variables que se distribuyen como DGPM en forma conjunta y tienen distribuciones marginales Fréchet. También se utilizan para construir los algoritmos de simulación de variables que representan pérdidas operativas las cuales pueden suceder en forma conjunta.

Diagrama 2 Proceso de la Estimación de parámetros



Las expresiones son función de los componentes angulares, ello es útil porque trabajando con variables empíricas se desconoce el umbral a partir del cual se comportan como DGP (componente radial).

Simulación de variables DGPM con marginales Fréchet

La simulación de variables DGPM con marginales Fréchet y parámetros de dependencia dados es compleja, sin embargo es la base para resolver el problema de modelar pérdidas operativas.

Michel desarrolla el algoritmo para simular variables DGPM con marginales uniformes, en particular sólo el que supone la llamada transformación de Pickands. La siguiente versión es una modificación del algoritmo para el modelo resultante de la transformación de Fréchet (supone distribuciones marginales Fréchet).

Los pasos para completar la simulación son:

- 1) Para realizar la simulación se suponen conocidos los siguientes parámetros obtenidos de las variables empíricas: $(\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1})$, r y s .
- 2) Obtener simulaciones de vectores aleatorios en el Simplex unitario, Algoritmo 4.10 en Michel (2006: 4). Potencialmente cada vector de variables en el Simplex puede ser un vector de componentes aleatorios angulares de variables DGPM.
- 3) Para completar el paso siguiente es necesario simular un componente radial aleatorio $C^{(i)} = -r_i$ uniformemente generado entre el umbral r y un número mayor a éste estimado empíricamente. Se genera uno para cada vector simulado en el Simplex unitario. Esto es equivalente a simular un número uniformemente distribuido en el cuadrante negativo entre $-1/r$ y cero. Nuevamente estos núme-

ros son cercanos a cero y el umbral a partir del cual se tiene una DGPM para un conjunto de datos empíricos.

- 4) Cada vector generado es considerado parte del conjunto de vectores dentro del cubo n dimensional $Q_{r,s}$ acotado por r_i y s , si individualmente cada z_i del vector cumple con $z_i > 1/r_i s$; y la suma de todos los componentes del vector cumple con $\sum_{i=1}^d z_i < 1 - (1/r_i s)$. Así, el valor de s es una longitud fija que determina el lado del cubo $Q_{r,s}$, r_i es aleatorio.
- 5) Se calcula el valor de la densidad de angular utilizando los valores de cada vector aleatorio $Z^{(i)} = z_1, \dots, z_{d-1}$ que haya cumplido con las condiciones anteriores, obtenidas en el paso anterior.
- 6) Se calcula el valor máximo (M) de la función de la densidad angular, el cual se obtiene con: $M = \sup_{z \in R_{d-1}} l_i(z)$.
- 7) Se utiliza el método de rechazo para elegir los vectores válidos para la simulación, mediante aplicar dicha técnica al valor de la densidad obtenida, Algoritmo 4.1 en Michel (2006: 3):

7.1) Generar un vector aleatorio $X = (x_1, \dots, x_d)$ uniformemente distribuido en $Q_{r,s}$, el cual corresponde a cada vector $Z^{(i)} = z_1, \dots, z_{d-1}$.

7.2) Generar un número aleatorio Y independiente de X el cual se distribuye uniformemente en $[0, M]$.

7.3) Se acepta $Z^{(i)}$ si $Y \leq g(Z^{(i)})$, de otra manera se rechaza y se regresa a 1. Se utiliza la función de la densidad angular para $g(Z^{(i)})$, esto es $l_i(z) = g(Z^{(i)})$.

- 8) Obtención del vector de variables DGPM aplicando la transformada inversa de la transformación de Fréchet según la cual con un vector aleatorio $Z^{(i)}$ y un componente radial $C^{(i)}$, podemos obtener un conjunto de variables x_1, \dots, x_d DGPM, con marginales exponenciales negativas:

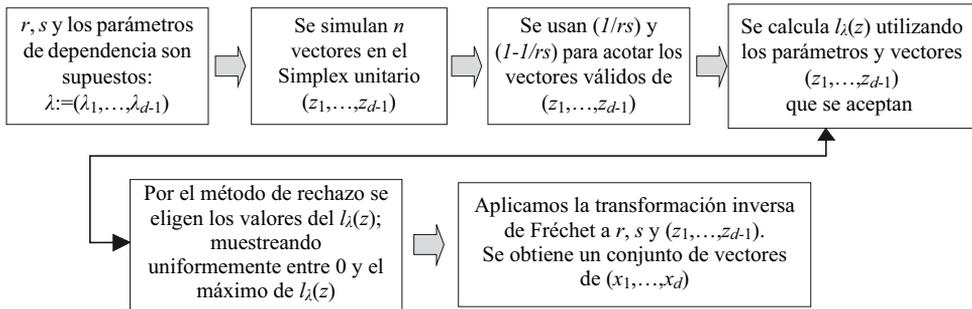
$$(x_1, \dots, x_d) = \left(\frac{1}{C^{(i)} z_1}, \dots, \frac{1}{C^{(i)} z_{d-1}}, \frac{1}{C^{(i)} - \sum_{i=1}^{d-1} z_i} \right)$$

Por su parte, $C^{(i)} = -r$, previamente simulada en el paso 3.

- 9) Se asegura que cada vector x_1, \dots, x_d cumpla con la siguiente condición para que el vector x pertenezca a K_s : $A_{r,s} = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in K_s | c = (1/x_1) + \dots + (1/x_d) < -r\}$.

Este proceso se puede resumir de la siguiente manera:

Diagrama 3
Simulación de variables DGPM con marginales Fréchet



3.4 Transformación de las variables simuladas en pérdidas operativas modeladas en forma conjunta (con dependencia en la cola)

Parámetros de las distribuciones marginales y transformación a marginales uniformes
 Primero se obtienen los parámetros de las DVE marginales (Fréchet) subyacentes a los datos.

Cuadro 3
Parámetros DVE de las variables RO20, RO21 y RO22 (Fréchet)

Parámetro	RO20	RO21	RO22
μ	8,000	2,000	15,000
α	1.70205	1.4700	1.1900
σ	9,998	6,100	3,500

Luego se obtiene su transformación a cuantiles mediante la expresión:

$$G_{1,\alpha}(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right)$$

Transformación en exponenciales negativas

Se realiza la transformación de los cuantiles a variables exponenciales negativas con:

$$y_i - F(x_i) = 1$$

Determinación de los parámetros de dependencia

Se determinan los parámetros de dependencia λ_1, λ_2 . Se aplica la prueba para diferentes valores de r . Utilizando la expresión de la densidad angular de la DGPM para $d=3$, se determina que $\{55.8672, \{\lambda_1 \rightarrow 3.86408, \lambda_2 \rightarrow 3.11154\}\}$, 55.8672 es el valor de máxima verosimilitud de la estimación.

Simulación de variables de los procesos de pérdidas subyacentes

Ahora se cuenta con el conjunto de parámetros para realizar la simulación de variable DGPM: $c=-0.6, s=-0.2, r=21, \lambda_1=3.9, \lambda_2=3.1$. El valor de s significa que las distribuciones marginales Fréchet en forma multivariada se empiezan a comportar como DGPM a partir del cuantil 0.8. Toda la simulación de las DGPM realizada en esta parte de la investigación sólo cubre 20% de la distribución Fréchet, pero incluye exactamente las observaciones de relevancia para esta investigación: las pérdidas operativas que ponen en riesgo el capital aportado.

Se generaron cerca de 80,000 ternas de variables con la dependencia prescrita, abajo del umbral 0.2, es decir arriba del cuantil 0.8.

Estas variables se transforman en variables de pérdida operativa aplicando la función de cuantiles de las Fréchet marginales con la expresión:

$$G^{-1}(q) = \mu + \sigma (-\ln(q))^{-1/\alpha}$$

Sin embargo, han sido transfiguradas y no se comportan más como Fréchet, sino como DPGM. Llegado a este punto se debe decidir qué hacer con lo que resta por debajo del cuantil 0.8 de la Fréchet, además, ya que la Fréchet sólo representa el máximo de cada bloque, ¿qué se hace con el resto de la distribución por debajo de los máximos?

El enfoque que se siguió es simple ya que la investigación se centra en el efecto de las pérdidas catastróficas:

- a) Para la parte de la distribución Fréchet que va de $[0, 0.8]$, se utiliza la parametrización DGP univariada y se simulan las variables de pérdidas de cada variable en forma independiente.
- b) Para los valores fuera del máximo, se consideró el promedio de las pérdidas utilizando la frecuencia y el valor promedio de las severidades del evento.

Tratamiento de las frecuencias

Se requieren supuestos de tres tipos de frecuencias para cada variable:

- 1) Para el promedio de pérdidas debajo de la distribución del máximo, es un promedio simple (sin volatilidad). Tiene el efecto de una tendencia en el proceso estocástico.
- 2) Para la DGP univariada truncada $\lambda_2=0.82609$.
- 3) Para las variables arriba del umbral multivariado $\lambda_3=0.14925$.

Cuadro 4
Frecuencias por periodo para cada variable

<i>Variable</i>	λ_1	λ_2	λ_3
RO20	24	0.82609	0.14925
RO21	30	0.82609	0.14925
RO22	21	0.82609	0.14925
¿Dependencia en salto?	No hay salto	Si	Si

Promedio de las pérdidas debajo del máximo

Se consideraron los siguientes parámetros:

Cuadro 5
Media de eventos debajo del máximo

<i>Variable</i>	λ_1	M	$\lambda_1\mu$	$\lambda_1\mu \cdot 52$
RO20	24	3,000	72,000	3,744,000
RO21	30	2,000	60,000	3,120,000
RO22	21	2,500	52,500	2,730,000
			<i>Suma</i>	<i>9,594,000</i>

Todas las medidas de riesgo simplemente se desplazarían 9.6 millones. No se incluyó en los cálculos finales.

DGP univariadas (DGPU)

Para tener un referente de comparación, se han estimado también los parámetros de las DGPU, para construir los escenarios de dependencia total e independencia. En este caso como las DGPU se modelan utilizando todos los datos del máximo, la frecuencia de estos eventos estará denotada por $\lambda_4=\lambda_2=\lambda_3=0.97$, casi un evento por semana en promedio.

Cuadro 6
Parámetros de las DGPU

<i>Parámetro</i>	<i>RO20</i>	<i>RO21</i>	<i>RO22</i>
μ	20,338.70	8,888.71	14,744.00
α	0.62376	0.738283	0.855246
σ	7,717.55	5,834.46	4,168.99
Extremos	80	75	40

Resumen de variables simuladas

Para los cálculos se consideró como periodo básico de simulación una semana. Se realizaron 30,000 simulaciones de trayectorias de pérdida de 52 semanas para poder examinar el comportamiento anual de las variables de pérdida en cuantiles muy altos. Cada variable cuenta ahora con un conjunto de escenarios simulados, cada uno de trayectorias de 52 semanas, el cual contiene: una tendencia dada por $\mu\lambda_2$; un proceso Poisson compuesto con DGP univariada subyacente en el rango-cuantil $[0,0.8]$ de la distribución; y un proceso Poisson compuesto con DGPM subyacente.

Por otro lado, están las variables simuladas que permitirán comparar los resultados anteriores contra la situación de dependencia completa e independencia. Cada variable cuenta ahora con un conjunto de escenarios el cual comprende: una tendencia dada por $\mu\lambda_2$; y un proceso Poisson compuesto con DGPU subyacente.

Se genera también un conjunto de variables con un proceso Poisson compuesto con distribución Fréchet univariada subyacente, éste último sólo con fines comparativos contra el primer proceso (con DGPM subyacente).

Medidas de riesgo: VaR Operacional (OpVaR) y Déficit Esperado (DE)

Las medidas de riesgo derivadas del proceso de simulación son las siguientes:

Cuadro 7
Medidas de riesgo para DGPU

<i>Medidas</i>	<i>Nivel de confianza</i>		
	<i>BIS II (99.9%)</i>	<i>(99.95%)</i>	<i>(99.9%)</i>
	<i>Independencia</i>		
OpVar	55,414,654	76,712,876	331,211,649
Déficit esperado (TailVar)	97,118,607	165,716,349	159,163,711
TailVar / OpVar	1.753	2.160	0.481
Escenarios	30	15	3
	<i>Dependencia completa</i>		
OpVar	66,078,102	103,170,770	48,536,483
Déficit esperado (TailVar)	138,300,631	220,063,747	340,698,200
TailVar / OpVar	2.093	2.133	0.760
Escenarios	30	15	3

Cuadro 8
DE para el modelo propuesto y los casos de referencia
(DGP [0,0.8] + DGPM [0,0.8])

Medidas	Nivel de confianza		
	BIS II (99.9%)	(99.95%)	(99.9%)
OpVar	58,326,006	159,554,637	548,058,757
Déficit esperado (TailVar)	218,133,858	294,383,110	357,069,655
TailVar / OpVar	3.740	1.845	0.611
Escenarios	30	15	3

Las pérdidas por encima del umbral multivariado son las determinantes para las medidas de riesgo, aquellas por debajo se pueden modelar con distribuciones univariadas más simples. Es posible centrar el análisis en la ocurrencia de pérdidas extremas y emplear modelos más simples debajo de tal umbral.

El modelo propuesto permite la obtención de medidas de riesgo con un escenario entre la independencia y la dependencia total (*Basilea II*). Es necesario determinar parámetros específicos de dependencia allí donde las pruebas estadísticas indican su existencia, el Log anidado para DGPM es una opción viable.

El modelo se desempeña bien al medir el riesgo con el nivel de confianza sugerido por *Basilea II* (99.9%). Es recomendable usar el modelo a este nivel de confianza para cotejar contra el regulatorio.

Las pérdidas modeladas arriba del percentil 99.9 implican, en muchos casos, escenarios empíricamente no observados. Si bien estos escenarios pueden no ser utilizados en el cálculo del capital regulatorio, si deben ser tomados en cuenta por los administradores como medida del perfil de riesgo potencial que exhibe la entidad y tomar medidas al respecto (mitigación, modificación del perfil de riesgo). Es posible utilizar dichos escenarios en análisis de pruebas bajo condiciones extremas y en la evaluación del perfil de riesgo potencial.

Con los resultados del modelo (distribuciones marginales) se puede priorizar la atención en medidas de mitigación orientándose a atender primero los eventos y líneas de negocio con mayor potencial de pérdidas. Como resultado, se debe atender en primera instancia los tipos de evento con el mayor índice de la cola (la γ de las distribuciones marginales).

Conclusiones

En este artículo se ha descrito la naturaleza del riesgo operativo y la necesidad de su medición mediante modelos apropiados y de su gestión mediante éstos. Se han resaltado los problemas actuales de su modelado tal como se reconoce inter-

nacionalmente, destacando los problemas de granularidad, dependencia y técnica de modelado (supuestos de distribución y estimación) de las severidades. Se ha indicado la metodología general que se debe seguir al modelarlo, en particular se hace hincapié en que el modelo Poisson compuesto es el cimiento.

El modelo Poisson compuesto se descompone en las distribuciones que ayudan a modelar las frecuencias y las que lo hacen para representar las severidades de pérdida. Relevancia particular tienen los modelos que auxilien a modelar las pérdidas en forma conjunta, se ha señalado como camino posible el modelado mediante DVE y DGP multivariados.

Se presentó una solución al modelado de variables de riesgo operativo con dependencia en la cola, la cual proviene de versiones complementarias (para el Log anidado) a los algoritmos de Michel para la versión de la DGPM para el Log. Los resultados son contundentes con respecto a la relevancia del déficit esperado (*expected shortfall*) más allá del percentil 99.9, ya que equivocar la previsión de pérdidas sugerida por el VaR operativo al nivel de confianza sugerido por *Basilea II*, implica riesgos muy altos. Si bien es recomendable mantener la medida de VaR operativo por su uso extendido y los criterios sugeridos por Basilea, en riesgo operativo es de primera importancia acompañar esta medida del déficit esperado como un indicativo de qué potencial de pérdidas existe si se rebase el VaR.

Referencias bibliográficas

- Álvarez P. (2001). “El Coeficiente de Solvencia de las Entidades de Crédito Españolas”, *Estabilidad Financiera*, Banco de España, núm. 1, septiembre, pp. 171-191.
- AIGOR (2006). “Observed Range of Practice in Key Elements of Advanced Measurement Approaches (AMA)”, October.
- Beirlant, J., Y. Goegebeur, J. Segers and J. Teugels (2004). *Statistics of Extremes: Theory and Applications*, Wilshire, Great Britain: Ed. Wiley.
- Biagini, F. and S. Ulmer (2008). “Asymptotics for Operational Risk quantified with Expected Shortfall”, Theresienstr 39, D-80333, Department of Mathematics, LMU, Munich, Germany, March.
- (s/f). *Multivariate Models for Operational Risk*, Center for Mathematical Sciences, Munich University of Technology.
- Cardona, P. (2004). “Aplicación de árboles de decisión en modelos de riesgo crediticio”, *Revista Colombiana de Estadística*, vol. 27, núm. 2.
- Coleman, R. (2003). “Op risk modelling for extremes”, *Operational Risk*, Part 2, January.

- (2002). “Op risk modelling for extremes”, *Operational Risk*, Part 1, December.
- Coles, S., J. Heffernan and J. Tawn (1999). “Dependence Measures for Extreme Value Analysis”, *Extremes*, vol. 2, num. 4, pp. 339-365.
- Coles, S. and J. Tawn (1994). “Statistical Methods for Multivariate Extremes”, *Applied Statistics*, 43, pp. 1-48.
- (1991). “Modelling Extreme Multivariate Events”, *Journal of the Royal Statistical Society*, 53, pp. 377-392.
- Chavez-Demoulin, P. Embrechts and Nelehová (2006). “Quantitative Models for Operational Risk: Extremes, dependence and aggregation”, *Journal of Banking and Finance*, 30, pp. 2635-2658.
- Degen, M. (2006). “On Multivariate Generalised Pareto Distributions and High Risk Scenarios”, Diploma Thesis, Department of Mathematics, ETH Zurich, March.
- Embrechts, P., C. Klüppelberg and M. Thomas (2003). “Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance”, *Stochastic Modeling and Applied Probability*, Germany: Springer.
- Embrechts, P. and G. Puccetti (w/d). “Aggregating Risk Capital, with an Application to Operational Risk”, Preprint.
- Falk, M., J. Hüsler and R. Reiss (2004). *Laws of Small Numbers: Extremes and Rare Events*, Birkhäuser Basel.
- Falk, M. and R. Michel (2006). *Testing for tail independence in extreme value models*, Tokyo: The Institute of Statistical Mathematics.
- Falk, M. and R. Reiss (2003). “On Pickands Coordinates in Arbitrary Dimensions / Dependence in Extreme Value Theory”, Presentation at EURANDOM, Eindhoven, January 23–25.
- Franchot, A, T. Roncalli and E. Salomon (2004). “The Correlation Problem in Operational Risk”, Groupe de Recherche Opérationnelle, Credit Agricole SA, France, January.
- Joe, H. (1994). “Multivariate Extreme-Value distributions with applications to Environmental data”, *The Canadian Journal of Statistics*.
- Joe, H., R. Smith and I. Weissman (1992). “Bivariate Threshold Methods for Extremes”, *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 22, num. 1, pp. 171-183.
- Klüppelberg, C., A. Kyprianou and R. Maller (2004). “Ruin Probabilities and Overshoots for general Lévy Insurance Risk Processes”, *The Annals of Applied Probability*, Institute of Mathematical Statistics, vol. 14, num. 4, pp. 1766–1801.
- Kotz S. and S. Nadarajah (2000). *Extreme Value Distributions, Theory and Applications*, Imperial College Press.

- Longin, F. (2000). "From value at risk to stress testing: The extreme value approach", *Journal of Banking and Finance*, 24, pp. 1097-1130.
- Mc Neil, A. J. (1999). "Extreme Value Theory for Risk Managers", Department Mathematik, ETH Zentrum, Zurich.
- Michel, R. (2006). "Estimation of the Angular Density in Multivariate Generalized Pareto Models", *Institute of Applied Mathematics and Statistics*, University of Würzburg, Germany, Preprint 270, September.
- (2006b). "Estimation of the Angular Density in Bivariate Generalized Pareto Models", *Institute of Applied Mathematics and Statistics*, University of Würzburg, Germany, Preprint 268, July.
- (2006c). "Simulation and Estimation in Multivariate Generalized Pareto Models", Institut für Mathematik Bayerische Julius-Maximilians-Universität Würzburg, Phd Thesis.
- (2006d). "Simulation of Generalized Pareto Distributions of Logistic Type and Applications", *Institut für angewandte Mathematik und Statistik Universität Würzburg*, Preprint 267, July.
- (2006e). "Comparison of Parametric Estimation Procedures in Multivariate Generalized Pareto Models", *Institut für angewandte Mathematik und Statistik Universität Würzburg*, Preprint 271, September.
- (2006f). "Some Notes on Multivariate Generalized Pareto Distributions", *Institut für angewandte Mathematik und Statistik Universität Würzburg*, Preprint 266, July.
- Moscadelli, M. (2004). "The Modelling of Operational risk: Experience with the analysis of the data collected by the Basel Committee", *Banca D'Italia*, Temi di Discussione de Servizio Studi, num. 517, July.
- Panjer, H. (2006). *Operational Risk, modeling Analytics*, USA: Ed. Wiley.
- Resnick, S. (2006). *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, New York, USA: Springer.
- Rosinski, J. (2007). *Simulation of Lévy processes. To appear in Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability: Computationally Intensive Methods and Simulation*, Ed. Wiley.
- Reiss, R. D. and M. Thomas (2001). *Statistical Analysis of Extreme Values: with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Birkhauser.
- Schoutens, W. (2003). *Lévy Processes in Finance. Pricing Financial Derivatives*, Wiley Series in Probability and Statistics, New York, USA: Wiley.

- Shevchenko M. (2006). "The Structural Modelling of Operational Risk via Bayesian inference: Combining Loss Data with Expert Opinions", *The Journal of Operational Risk*, 1(3), pp. 3-26.
- Stephenson, Alec (2003). "Simulating Multivariate Extreme Value Distributions" *Extremes*, 6, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 49-59.
- Tawn J. (1998). "Bivariate Extreme Value Theory: Models and Estimation", *Biometrika*, 75, pp. 397-415.
- Universia Business Review (2005). *Actualidad Económica*, Tercer trimestre, pp. 2-15.

Recursos electrónicos

- Böcker, K. and C. Klüppelberg (2005). "Operational VaR: a closed form approximation", *Risk*, December, (www.risk.net/risk-magazine/technical-paper/1500243/operational-var-closed-form-approximation).
- Feria J. y J. Samaniego (2004). "La Banca en Internet: Riesgos Implícitos" (<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Economias>).
- Hull, J. (2007). "The power law", *Risk Net*, March, (www.risk.net/risk-magazine/feature/1497615/the-power-law).
- Martin, R. (2007). "Shortfall: a tail of two parts", *Risk*, February, (www.risk.net/risk-magazine/technical-paper/1500267/shortfall-tail).
- Stephenson, Alec (2008). "The EVD Package", (<http://www.maths.lancs.ac.uk/stephena/>).
- (2006). "A User's Guide to the EVD Package (Version 2.2)", (<http://www.maths.lancs.ac.uk/stephena/>).
- Tajvidi, N. (1996). "Characterisation and Some Statistical Aspects of Univariate and Multivariate Generalized Pareto Distributions", Dissertation, Department of Mathematics, Chalmers Tekniska Högskola Göteborg (<http://www.math.chalmers.se/~nader/thesis.ps>).