*Análisis Económico*, vol. XXXV, núm. 89, mayo-agosto de 2020, pp.193-213, ISSN: 0185-3937, e- ISSN: 2448-6655

# Decisiones óptimas de consumo y portafolio con opciones asiáticas de tipo americano en un modelo de equilibrio general dinámico estocástico

# Optimal Consumption and Portfolio Decisions with American-Style Asian Options in a Stochastic Dynamic General Equilibrium Model

*(Esta versión: 1/diciembre/2019; aprobado: 04/mayo/2020)*

*Ma. Teresa Verónica Martínez-Palacios* *
*Ambrosio Ortiz-Ramírez***
*Francisco Venegas-Martínez****

**RESUMEN**

En esta investigación se desarrolla un modelo de equilibrio general dinámico estocástico sobre las decisiones de consumo e inversión de un agente adverso al riesgo representativo de una economía pequeña y cerrada, sujeto al riesgo de mercado de los activos que conforman el portafolio, esto en un horizonte temporal finito con fecha final aleatoria. Se supone que el agente tiene acceso a tres activos: una acción, cuya tasa de interés es estocástica, una opción suscrita sobre la acción y un bono libre de riesgo. Los precios de los activos se expresan en unidades del bien de consumo y no hay impuestos ni costos de transacción en el mantenimiento del portafolio. El problema planteado es útil para caracterizar la prima de una opción asiática de venta de tipo americano con precio de ejercicio flotante como solución de una ecuación diferencial parcial.
**Palabras clave**: Control óptimo estocástico; selección de portafolio; opciones asiáticas de tipo americano; tasa de interés estocástica.

* Escuela Superior de Economía. Instituto Politécnico Nacional, México. Correo electrónico: mmartinezpa@ipn.mx.
** Escuela Superior de Economía. Instituto Politécnico Nacional, México. Correo electrónico: amortiz@ipn.mx.
*** Escuela Superior de Economía. Instituto Politécnico Nacional, México. Correo electrónico: fvenegas1111@yahoo.com.mx

**Clasificación JEL**: C61; G11; G13; E43.

**ABSTRACT**

This work developed a dynamic stochastic general equilibrium model about the consumption and investment decisions of a representative risk averse agent, for a small and closed economy, constrained to the market risk of the assets in the portfolio with a finite time horizon of stochastic length. It is assumed that the agent has access to three assets: a stock, whose interest rate is stochastic, an option subscribed on the stock and a risk-free bond. The prices of the assets are quoted in units of the consumer good, and there are no taxes and no transaction costs for the maintenance of the portfolio. The proposed problem is useful to characterize the premium of an American-style Asian put option with floating strike as the solution of a partial differential equation.
**JEL Classification**: C61; G11; G13; E43.
**Keywords**: Stochastic optimal control; portfolio choice; American-style Asian option pricing; stochastic interest rate.

## INTRODUCCIÓN

El escenario incierto generado por los mercados financieros demanda encontrar fórmulas más eficientes para la administración de riesgos. En respuesta a tales requerimientos, desde diferentes enfoques teóricos y de manera multidisciplinaria, se han desarrollado modelos que contribuyen a describir y explicar la aleatoriedad de los mercados, no sólo para la administración de riesgos de mercado, sino también con el objetivo de optimizar la utilidad de los agentes económicos.

Particularmente, los modelos de Equilibrio General Dinámico Estocástico (EGDE) son una estructura teórica que permite analizar procesos financieros complejos. En este contexto existen diversos modelos en la literatura, como, por ejemplo, Merton (1971), Björk, Myhrman y Persson (1987), Venegas-Martínez (2008), Björk (2009), Huyên (2009) y Martínez-Palacios, Venegas-Martínez y Martínez-Sánchez (2015), entre otros. Por ejemplo, Venegas-Martínez (2008) presenta diversas aplicaciones económicas de EGDE en tiempo continuo. Por su parte, Björk (2009) se concentra en la modelación del problema de selección de portafolio y consumo óptimos. Al respecto, es importante mencionar la aplicación de procesos de difusión o procesos de difusión con saltos en el tratamiento del EGDE; véase, al respecto, Merton (1971) y (1992) y Venegas-Martínez (2006). Otro tema de relevancia actual, como se destaca en Cox, Ingersoll y Ross (1985a) y (1985b), es el desarrollo de modelos macroeconómicos estocásticos que explican hechos estilizados en las decisiones de consumo y portafolio de los agentes; véanse, al respecto, los trabajos de: Venegas-Martínez (2004 y 2005), Turnovsky y Smith (2006), Venegas-

Martínez y Ortiz-Arango (2010) y Martínez-Palacios, Venegas-Martínez, y Martínez-Sánchez (2015), entre otros.

Así mismo, en un entorno de incertidumbre, la modelación de los tiempos de paro en el modelado de derivados de tipo americano es un elemento esencial que en muchos de los casos proporciona un modelado adecuado; véanse Shreve (1997), Karatzas y Shreve (1988) y Kohn (2003). Para aplicaciones prácticas de los temas anteriores véanse: Merton (1992), Hernández-Lerma (1994), Sethi y Thompson (2000), Björk (2004 y 2009), Villeneuve (2007), Kohn (2011) y Martínez-Palacios y Venegas-Martínez (2014), entre otros. Es oportuno mencionar también que a excepción de Kohn (2011) los autores citados aplican tiempos de paro en conjunto con el enfoque EGDE. Por ejemplo, Björk (2004 y 2009) agrega un tiempo de paro para no generar soluciones de control degeneradas cuando ni las restricciones de control ni la función de herencia prohíben al consumidor incrementar su utilidad a cualquier nivel. Por su parte Sethi y Thompson (2000) definen el tiempo de paro como el momento en que el agente pueda caer en bancarrota a lo largo del proceso, mientras que en Martínez-Palacios y Venegas-Martínez (2014) se implementa el tiempo de paro para establecer el valor intrínseco de la opción americana y el tiempo de ejercicio de esta dentro del modelo.

Un tema de particular importancia es la valuación de productos derivados, cuya literatura es vasta y variada, considérense al respecto los artículos seminales de Black y Scholes (1973), Merton (1973), Cox y Ross (1976), y Cox, Ingersoll y Ross (1985a) y (1985b). Entre las contribuciones más recientes en la valuación de opciones sobre acciones, índices bursátiles y divisas se encuentran: Geske y Shastri (1985), Ho y Lee (1986), Hull y White (1987) y (1993a), Detemple y Weidong (2002), Sierra (2007), Venegas-Martínez (2006), Cruz-Aké y Venegas-Martínez (2010), Ángeles-Castro y Venegas-Martínez (2010), Kohn (2011), Martínez-Palacios y Venegas-Martínez (2014), entre otros. Una característica común que guardan estas investigaciones, a excepción de Martínez-Palacios y Venegas-Martínez (2014) (quienes utilizan un horizonte temporal finito pero estocástico) es que consideran una temporalidad finita y determinista para la determinación del precio de los derivados. Asimismo, una particularidad de las investigaciones de Cruz-Aké y Venegas-Martínez (2010) y Venegas-Martínez (2009) es que los autores obtienen fórmulas cerradas de los precios de diversos derivados. Por su parte, Martínez-Palacios y Venegas-Martínez (2014) obtienen una fórmula aproximada de valuación de opciones americanas, mientras que Sierra (2007) modela los activos mediante Brownianos fraccionales.

Un grupo fundamental dentro de las opciones exóticas considera aquellas cuyo pago al vencimiento del contrato depende de la trayectoria seguida por el precio del activo subyacente durante el período de vigencia de la opción. Estas opciones son conocidas como dependientes de la trayectoria[1]. Las opciones asiáticas son opciones exóticas totalmente dependientes de la trayectoria y su precio depende de la caminata aleatoria histórica del precio del activo subyacente mediante algún tipo de promedio. Diferentes factores afectan la definición del promedio, entre ellos están: el periodo promedio previo al vencimiento, promedio aritmético o geométrico, promedio ponderado o no ponderado y con muestra de precios discreta o continua. De esta forma se pueden distinguir a las opciones asiáticas con valor promedio del subyacente y precio de ejercicio fijo, y las de precio de ejercicio promedio (de los valores alcanzados por el precio del activo durante la vida del contrato).

Destaca el hecho de que las opciones asiáticas estén basadas en el promedio de los precios del activo subyacente, esto evita la manipulación de los precios previo al vencimiento, lo que las convierte en instrumentos eficaces de cobertura ante los movimientos de los precios. En este mismo tenor, estas opciones son útiles cuando se realizan transacciones frecuentes sobre un mismo activo en un tiempo determinado; es decir, resulta más barato comprar una opción asiática que considere *n* diferentes precios de un mismo activo al vencimiento, que comprar *n* opciones del mismo activo a diferentes vencimientos, lo cual considera *n* diferentes primas, siendo más costoso. Asimismo, tiene un costo menor comprar una opción asiática que una *plain vanilla* porque la volatilidad del promedio en general es menor que la del subyacente. En este contexto, la literatura es extensa; véanse, por ejemplo: Arregui y Vallejo (2001), Vanmaele, Deelstra, Liinev, Shuguang, Shuiyong, Lijun (2006), Pascucci (2007), Peng y Peng (2010), Ortiz-Ramírez y Martínez-Palacios (2016), Li y Chen (2016), Martínez-Palacios, Ortiz-Ramírez y Martínez-Sánchez (2017), Wang y Zhang (2018), Pirjol y Zhu (2018), Ocejo (2018), por nombrar sólo algunos. Es necesario recordar también que en la valuación de asiáticas no existe solución cerrada mediante el enfoque probabilista por lo que se proponen aproximaciones numéricas. Así por ejemplo Peng y Peng (2010) proponen un método de árbol binomial mediante el cual estiman el proceso de precios cuando el subyacente presenta elasticidad constante de la varianza (CEV) para valuar opciones asiáticas con promedio aritmético. Ortiz-Ramírez y Martínez-Palacios (2016) proponen una metodología mediante simulación Monte Carlo para obtener el precio de una opción asiática con subyacente promedio

[1] Podría considerarse a la opción de tipo americana una opción dependiente de la trayectoria, ya que generalmente existe una probabilidad finita de que la opción se ejerza antes de la expiración y, por lo tanto, deje de existir. Esto ocurre si el precio del activo alguna vez entra en el rango donde es óptimo el ejercicio. El ejercicio temprano de un derivado americano convierte a la opción en una opción dependiente de la trayectoria. Sin embargo, a pesar de ser una opción dependiente de la trayectoria no la convierte en una opción exótica (Wilmott, 1995).

y tasa de interés estocástica conducida por procesos de reversión a la media de tipo Vasicek y CIR. Estos autores contrastan los resultados de la valuación de las opciones asiáticas con europeas y muestran que los precios obtenidos para opciones asiáticas son menores que los de europeas, bajo los mismos supuestos de mercado. Por su parte Li y Chen (2016) derivan una fórmula para el precio de opciones asiáticas con promedio aritmético mediante la expansión en serie Edgeworth; la fórmula obtenida es consistente con la de Black-Scholes-Merton y una suma finita que estima el término correspondiente a la asiática. Estos autores también presentan un método para calcular cada término de su fórmula y sus griegas correspondientes.

En búsqueda de modelos que expliquen de manera más fiel la realidad contingente, se encuentran en la literatura de valuación de opciones asiáticas sobre activos subyacentes, cuyos parámetros de tendencia y volatilidad son estocásticos; al respecto véanse, Jiang y Sluis (1999), Fouque y Chuan-Hsiang (2003), Nielsen y Sandmann (1996), Shuguang, Shuiyong, Lijun (2006), Min-Ku, Jeong-Hoon y Kyu-Hwan (2014), entre otros. De particular interés para esta investigación resultan los trabajos que valúan opciones asiáticas de tipo americano con o sin parámetros estocásticos; véanse, por ejemplo, Hull y White (1993b), Jørgensen y Hansen (1998), Broadie, Glasserman y Ha (2000), Peskir y Uys (2003), Pascucci (2007), Keng-Hsin, Kehluh y Ming-Feng (2009) y Gaudenzi, Lepellere y Zanette (2010). Por ejemplo, Broadie, Glasserman y Ha (2000) desarrollan un método de simulación para determinar el precio de las opciones americanas dependientes de la trayectoria y sobre una gran cantidad de activos subyacentes. Pascucci (2007) considera un modelo general correspondiente a una ecuación diferencial parcial degenerada que incluye opciones asiáticas y modelos de volatilidad dependientes de la trayectoria como casos particulares. Este autor mediante una funcional adecuada demuestra la existencia y singularidad de una solución sólida para la frontera libre y los problemas de paro óptimos.

En el marco de las investigaciones referidas, las principales contribuciones de este trabajo son: 1) con base en supuestos de racionalidad económica, se caracteriza la opción asiática-americana mediante el enfoque teórico de EGDE en tiempo continuo, 2) se incluyen funciones de tiempo de paro; 3) se considera una tasa de interés estocástica; la empresa representativa tiene una función de producción estocástica; y 4) se determina el proceso de la tasa corta de tipo CIR (Cox, Ingersoll y Ross, 1985b) de manera endógena en el equilibrio.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma: en la primera sección se describe el problema objeto de esta investigación, así como los activos de inversión del modelo; en la sección 2 se establece la ecuación de la riqueza de que dispone el agente económico. En la sección 3 se describe el proceso productivo; en la sección 4 se establece el tiempo de paro como un proceso que evitará que el agente incurra en bancarrota; en las secciones 5 y 6 se caracteriza la solución del problema planteado en la cuarta sección, mediante una ecuación diferencial parcial y los controles que optimizan el problema de decisión; en la sección 7 se caracteriza la prima de una opción asiática de venta con precio de ejercicio promedio geométrico de tipo americana como solución de una ecuación diferencial parcial y se establece el proceso para la tasa corta tipo CIR; por último, se presentan las conclusiones.

## I. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA: EXPRESIÓN ANALÍTICA DE HIPÓTESIS

En esta sección mediante EGDE se establece un modelo de un consumidor-inversionista racional, representativo de una economía pequeña y cerrada, en la que sólo se produce y se consume un solo bien de carácter perecedero.

Considere un agente económico que dispone de un horizonte temporal, representado por el intervalo $[0, T]$, donde $T$ es estocástico (y será determinado en la sección 5). En el tiempo $t = 0$, el agente es dotado con una riqueza inicial $X_0$ y enfrenta la decisión de cómo distribuir su riqueza entre consumo e inversión en un portafolio de activos, con el objetivo de maximizar su utilidad total esperada y descontada por el consumo de un bien genérico y a la vez evitar la bancarrota. Para tal efecto, se supone que existe un sistema bancario en el que al agente puede prestar y pedir prestado a una tasa de interés continuamente capitalizable para todos los plazos, cuyo proceso se determinará de manera endógena en el equilibrio. En los mercados, las ventas en corto son permitidas e ilimitadas. Asimismo, se supone que al agente puede invertir en tres activos, un principal como ahorro en un banco, una acción y una opción asiática de venta de tipo americano; los precios de los activos se expresan en términos reales[2].

En las siguientes subsecciones de este apartado, se establecen como procesos markovianos controlados, los rendimientos de los precios de los activos que alimentan al modelo; así como la función objetivo a maximizar.

### *Cuenta de ahorro*

El agente invierte en el banco, un principal $M_0 = M(0)$, que paga una tasa de interés $r > 0$, continuamente capitalizable y cuyo proceso será determinado en la novena sección. La razón de cambio en el valor de la inversión está dada por:

[2] En unidades del bien de consumo.

$$dR_{M_t} = \frac{dM_t}{M_t} = rdt. \tag{1}$$

*Activo subyacente*

El segundo activo es una acción cuya dinámica de precios en términos reales es modelada por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dR_{S_t} = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{2}$$

donde $W_t$ es un proceso de Wiener o movimiento browniano, definido sobre un espacio fijo de probabilidad $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,T]}, P\big)$ con su filtración aumentada, donde $\mu \in R$ y $0 < \sigma \in \mathbb{R}$, representan el parámetro de tendencia y la volatilidad instantánea del activo, respectivamente.

*Contrato de opción asiática de venta de tipo americano*

El tercer activo es un contrato de opción asiática de venta de tipo americano suscrito sobre la acción que tiene proceso definido en (2). Para una opción asiática de venta con precio de ejercicio promedio igual a la media geométrica, el valor intrínseco del contrato en la fecha de vencimiento $T$ es igual a $max\big(K_{t,T} - S_T, 0\big)$. El proceso de la media geométrica en tiempo continuo[3], es definido por:

$$K_{t,T} = e^{\left\{\frac{1}{T-t}\int_t^T ln(S_u)du\right\}}. \tag{3}$$

A partir de (3) se define a:

$$M_{Gt} = \int_0^T ln(S_u)du \qquad \Rightarrow \qquad dM_{Gt} = ln(S_t)\,dt. \tag{4}$$

Con base en (2), (3) y (4) se tiene que el cambio en el precio de la opción asiática de venta está dado por una función $O_{At} = O_{At}(S_t, M_{Gt}, t)$. Al aplicar el Lema de Itô se obtiene que:

[3] Se define al promedio geométrico como:
$K_{t,T} = exp\left\{\frac{1}{T-t}\int_t^T ln(S_u)\,du\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}exp\{\sum_{i=1}^n log(S_{t_i})\}$, donde los $t_i, i = 1, \ldots, n$, representan una partición de $t, T$ (Venegas-Martínez, 2008).

$$dO_{At} = \left(\frac{\partial O_{At}}{\partial t} + \frac{\partial O_{At}}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial O_{At}}{\partial M_{Gt}} ln(S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O_{At}}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{\partial O_{At}}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t \tag{5}$$

El rendimiento de la opción está dado por el cambio porcentual de la prima, es decir:

$$dR_{O_{At}} \equiv \frac{dO_{At}}{O_{At}} \tag{6}$$

Si a partir de (5) se denota a:

$$\mu_{O_{At}} = \frac{1}{O_{At}}\left(\frac{\partial O_{At}}{\partial t} + \frac{\partial O_{At}}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial O_{At}}{\partial M_{Gt}} ln(S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O_{At}}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)$$

$$\text{y} \quad \sigma_{O_{At}} = \frac{1}{O_{At}}\left(\frac{\partial O_{At}}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t\right) \tag{7}$$

se sigue que:

$$dO_{At} = O_{At}\mu_{O_{At}}dt + O_{At}\sigma_{O_{At}}dW_t \tag{8}$$

Las proporciones relativas al portafolio de inversión, en el tiempo $t$, que el agente asigna a la acción y opción asiática de venta de tipo americana se denotan mediante $u_{1t}$ y $u_{2t}$, respectivamente, la proporción $u_{3t} = 1 - u_{1t} - u_{2t}$, se designa al ahorro y $c_t$ denotará la tasa de consumo, $c_t \geq 0, \forall t$.

*Se supone que la utilidad del agente está dada por:*

$$E\left[\int_0^T F(t, c_t)dt \,|\mathscr{F}_0\right],$$

donde $F$, es la función descontada de utilidad por consumo y $\mathcal{F}_0$ es la información relevante al tiempo $t = 0$.

## II. Ecuación de la riqueza

Se supone que el agente opera de manera continua y que no se incurre en ningún momento en costos por comisiones a agentes de casa de bolsa ni pagos de impuestos a autoridades fiscales. Con base en las hipótesis enunciadas, se supone ahora que $X_t$

representa la riqueza real del consumidor en el tiempo $t$, así la dinámica del proceso de la riqueza está dada por:

$$dX_t = X_t u_{1t} dR_{S_t} + X_t u_{2t} dR_{O_{At}} + X_t(1 - u_{1t} - u_{2t})dR_{MGt} - c_t dt \qquad (9)$$

es decir:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left(r + u_{1t}(\mu - r) + u_{2t}\left(\mu_{O_{At}} - r\right) - \frac{c_t}{X_t}\right)dt + \left(u_{1t}\sigma + u_{2t}\sigma_{O_{At}}\right)dW_t, \qquad (10)$$

al definir en (10) a:

$$\mu_X = \left(r + u_{1t}(\mu - r) + u_{2t}\left(\mu_{O_{At}} - r\right) - \frac{c_t}{X_t}\right) \quad \text{y} \quad \sigma_X = \left(u_{1t}\sigma + u_{2t}\sigma_{O_{At}}\right) \qquad (11)$$

se reescribe la ecuación de la riqueza como:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_X dt + \sigma_X dW_t. \qquad (12)$$

III. POSIBILIDADES DE PRODUCCIÓN

Se considera que la empresa representativa en esta economía tiene una función de producción $y_t = P_t S_t$, donde el producto marginal del capital $P_t$, durante el proceso productivo, es modelado mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dP_t = \alpha(P_t)dt + \beta(P_t)dU_t \qquad (13)$$

en la que:

$$\alpha(P_t) = \kappa(\theta - P_t) \qquad \text{y} \qquad \beta(P_t) = \nu\sqrt{P_t} \qquad (14)$$

con $\{U_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento browniano unidimensional definido sobre un espacio fijo de probabilidad $\left(\Omega^U, \mathcal{F}^U, (\mathcal{F}_t^U)_{t\in[0,T]}, P^U\right)$ con su filtración aumentada. Los parámetros $\theta,\ \kappa$ y $\nu$ se interpretan como producto marginal del capital de largo plazo, la velocidad de reversión y la volatilidad de la varianza del producto marginal del capital, respectivamente. Observe que la raíz cuadrada en $P_t$ asegura que el proceso sigue siendo no negativo en cada instante de tiempo y si en algún momento alcanza un valor de cero entonces puede tomar un valor positivo de nuevo, por lo que el nivel absoluto de la varianza se incrementa con un aumento de $P_t$. Para efectos de hacer manejables analíticamente las ecuaciones, se supondrá que los procesos de Wiener son independientes, es decir, $\text{Cov}(dW_t, dU_t) = 0$.

## IV. Tiempo de paro y problema de control óptimo estocástico

En esta sección se establece ya el modelo a resolver, pero se hace indispensable imponer un tiempo de paro para que matemáticamente el problema no degenere.

### *Tiempo de paro*

Dado el supuesto de que las ventas en corto son permitidas e ilimitadas, si el agente económico presenta un comportamiento ambicioso por el consumo, podría caer en bancarrota, castigando simultáneamente al sistema bancario. Para sortear financieramente con este problema se restringirá el dominio a $D = [0, T] \times \{x | x > 0\}$, y para ello se define el tiempo de paro mediante la función:

$$\xi = min[inf\{t > 0 | X_t = 0\}, T],$$

de esta manera cuando el proceso estocástico de la riqueza sea cero, entonces termina el problema de optimización.

### *Problema de control óptimo estocástico*

En resumen, el planteamiento formal del problema de maximización de utilidad del consumidor como un problema de control óptimo estocástico es:

$$\begin{aligned}
&\underset{u_{1t}, u_{2t}, c_t}{\text{Maximizar}}\ \mathrm{E}\left[\int_0^{\xi} F(t, c_t) dt | \mathscr{F}_0\right],\\
&dX_t = X_t \mu_X dt + X_t \sigma_X dW_t\\
&0 \leq u_{1t} \leq 1, 0 \leq u_{2t} \leq 1 \text{ y } 0 \leq u_{3t} \leq 1, \quad (15)\\
&u_{1t} + u_{2t} + u_{3t} = 1\\
&X_0 = x_0,\\
&c_t \geq 0, \forall\ t \geq 0.
\end{aligned}$$

## V. Programación dinámica: ecuación diferencial parcial (EDP) de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

Para resolver el problema en (15) y encontrar las proporciones de la riqueza que optimizan el portafolio de inversión y el consumo, se define la función de valor del problema de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
J\left(X_t, P_t, M_{Gt}, t\right) &= \max_{u_{1t}, u_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \le c_s|_{[t,\xi]}} \mathrm{E}\left[\int_t^{\xi} F\left(c_s, s\right) \mathrm{d}s \middle| F_t\right] \\
&= \max_{u_{1t}, u_{2t} \in \mathbb{R}, 0 \le c_s|_{[t,\xi]}} \mathrm{E}\left[\int_t^{t+\mathrm{d}t} F\left(c_s, s\right) \mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^{\xi} F\left(c_s, s\right) \mathrm{d}s \middle| F_t\right].
\end{aligned} \tag{16}
$$

Después de aplicar al primer sumando el teorema del valor medio del cálculo integral y recursividad al segundo sumando, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
J(X_t, P_t, M_{Gt}, t) = \max_{u_{1t}, u_{2t} \in R, 0 \le c_s|_{[t,t+dt]}} & E\{F(c_t, t)dt + o(dt) \\
& + J(X_t + dX_t, P_t + dP_t, M_{Gt} + dM_{Gt}, t + dt)|\mathscr{F}_t\}
\end{aligned}
$$

Se emplea entonces expansión en serie de Taylor al segundo sumando, de donde se obtiene:

$$
\begin{aligned}
J(X_t, P_t, M_{Gt}, t) = \max_{u_{1t}, u_{2t} \in R, 0 \le c_s|_{[t,t+dt]}} & E\{F(c_t, t)dt + o(dt) + J(X_t, P_t, M_{Gt}, t) \\
& + dJ(X_t, P_t, M_{Gt}, t) + o(dt)|\mathscr{F}_t\}
\end{aligned}
$$

En consecuencia:

$$
0 = \max_{u_{1t}, u_{2t} \in R, 0 \le c_s|_{[t,t+dt]}} E\{F(c_t, t)dt + o(dt) + dJ(X_t, P_t, M_{Gt}, t)|\mathscr{F}_t\}.
$$

Ahora se calcula $dJ(X_t, P_t, M_{Gt}, t)$ con el lema de Itô, de donde se sigue que:

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{u_{1t}, u_{2t} \in R, 0 \le c_s|_{[t,t+dt]}} & E\left\{F(c_t, t)dt + o(dt) + \left[\frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial t}\right.\right. \\
& + \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial X_t} X_t \mu_X + \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial P_t} P_t \alpha + \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial M_{Gt}} ln(S_t) \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, P_t, M_G t, t)}{\partial P_t^2} P_t^2 \beta^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 \right] dt \\
& \left. + \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial P_t} P_t \beta dU_t + \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial X_t} X_t \sigma_X dW_t |\mathscr{F}_t \right\}.
\end{aligned}
$$

A continuación, se calcula el valor esperado de esta última ecuación, y dado que $dW_t$ y $dU_t$ son $\mathcal{N}(0, dt)$, se eliminan los términos con browniano. Asimismo, se divide la expresión entre $dt$ y se toma el límite de esta cuando $dt \to 0$, de lo que resulta:

$$0 = \max_{u_{1t}, u_{2t} \in R, 0 \leq c_s|_{[t,t+dt]}} \left\{ F(c_t, t) + \left[ \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial P_t} P_t \alpha \right.\right.$$
$$+ \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial X_t} X_t \mu_X + \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial M_{Gt}} \ln(S_t) \tag{17}$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial P_t^2} P_t^2 \beta^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 \right] \middle| F_t \right\}.$$

A la última ecuación se deben de imponer las condiciones de frontera correspondientes, lo que da lugar a la condición HJB:

$$\begin{cases} 0 = \max_{u_{1t}, u_{2t} \in R, 0 \leq c_s|_{[t,t+dt]}} \left\{ F(c_t, t) + \left[ \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial X_t} X_t \mu_X \right.\right. \\ + \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial P_t} P_t \alpha + \frac{\partial J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial M_{Gt}} ln(S_t) \\ \left.\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial P_t^2} P_t^2 \beta^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_X^2 \right] \middle| \mathscr{F}_t \right\}. \quad (18) \\ J(X_T, P_t, M_{GT}, T) = 0 \\ J(0, P_t, M_{Gt}, t) = 0 \end{cases}$$

*Función de utilidad*

Se supone que la función de utilidad es de la forma $F(c_t, t) = e^{-\rho t} V(c_t)$; donde $V(c_t)$ es un miembro de la familia de funciones de utilidad HARA (Merton, 1990 y Hakansson, 1970), específicamente se elige la función de consumo:

$$F(c_t, t) = e^{-\rho t} \frac{c_t^{\gamma}}{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

donde $\rho$ denota la tasa subjetiva de descuento y $\gamma$ representa el coeficiente de aversión al riesgo**.**

*Condiciones de primer orden*

Se supone máximo interior en la ecuación (17) y se realizan las sustituciones correspondientes de la función de utilidad y de la ecuación (11):

$$0 = \Big\{ e^{-\rho t}\frac{c_t^{\gamma}}{\gamma} + \Big[ \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \big(u_{1t}\sigma + u_{2t}\sigma_{O_{At}}\big)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial P_t^2} P_t^2 \beta^2 + \frac{\partial J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial t} + \frac{\partial J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial X_t} X_t\left( r + u_{1t}(\mu - r) + u_{2t}\big(\mu_{O_{At}} - r\big) - \frac{c_t}{X_t}\right) + \frac{\partial J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial P_t} P_t \alpha + \frac{\partial J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial M_{Gt}} ln(S_t) \Big] \Big| \mathscr{F}_t \Big\} \qquad (19)$$

El objetivo ahora es optimizar la condición HJB para los controles $u_{1t}, u_{2t}$ y $c_t$, por lo que las condiciones de primer orden son:

$$c_t^{\gamma-1} = \left[\frac{\partial J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial X_t} e^{\rho t}\right], \qquad (20)$$

$$u_{1t} = -\frac{\frac{\partial J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial X_t} X_t(\mu - r) + \frac{\partial^2 J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma u_{2t}\sigma_{O_{At}}}{\frac{\partial^2 J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma^2}, \qquad (21)$$

$$u_{2t} = -\frac{\frac{\partial J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial X_t} X_t\big(\mu_{O_{At}} - r\big) + \frac{\partial^2 J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma u_{1t}\sigma_{O_{At}}}{\frac{\partial^2 J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial X_t^2} X_t^2 \sigma_{O_{At}}^2}. \qquad (22)$$

## VI. CONTROLES ÓPTIMOS

Para elegir la función $J(X_t, P_t, M_{Gt}, t)$ que satisfaga HJB, se propone el producto de funciones separables siguiente:

$$J(X_t, P_t, M_{Gt}, t) = e^{-\rho t} g(M_{Gt}, t)\frac{[P_t X_t]^{\gamma}}{\gamma P_t^{\gamma-1}}, \qquad (23)$$

junto con $g(M_{GT}, T) = 0$ debido a las condiciones de frontera de la ecuación de HJB. Dado $J$, se tiene:

$$\frac{\partial J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial t} = e^{-\rho t}\frac{[X_tP_t]^\gamma}{\gamma P_t^{\gamma-1}}\frac{\partial g(M_{Gt},t)}{\partial t} - \rho e^{-\rho t}\frac{[X_tP_t]^\gamma}{\gamma P_t^{\gamma-1}} g(M_{Gt},t) \quad (24)$$

$$\frac{\partial J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial M_{Gt}} = e^{-\rho t}\frac{[X_tP_t]^\gamma}{\gamma P_t^{\gamma-1}}\frac{\partial g(M_{Gt},t)}{\partial M_{Gt}}$$

$$\frac{\partial J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial X_t} = X_t^{\gamma-1}e^{-\rho t}g(M_{Gt},t)$$

$$\frac{\partial^2 J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial X_t^2} = (\gamma-1)X_t^{\gamma-2}e^{-\rho t}g(M_{Gt},t)$$

$$\frac{\partial J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial P_t} = X_t^{\gamma-1}e^{-\rho t}g(M_{Gt},t)$$

$$\frac{\partial^2 J(X_t,P_t,M_{Gt},t)}{\partial P_t^2} = 0.$$

Al sustituir los valores de (24) en (20), (21) y (22), se obtiene:

$$\hat{c}_t = X_t[g(M_{Gt},t)]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \qquad (25)$$

$$\hat{u}_{1t} = -\frac{(\mu-r)+(\gamma-1)\sigma u_{2t}\sigma_{O_{At}}}{(\gamma-1)\sigma^2}, \qquad (26)$$

$$\hat{u}_{2t} = -\frac{\left(\mu_{O_{At}}-r\right)+(\gamma-1)\sigma u_{1t}\sigma_{O_{At}}}{(\gamma-1)\sigma_{O_{At}}^2}. \qquad (27)$$

Observe que $\hat{c}$ es lineal en la riqueza, pero estocástica, lo cual es acorde con la realidad incierta de los mercados financieros, por otra parte, las proporciones óptimas $\hat{u}_{1t}$ y $\hat{u}_{2t}$ forman un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{u}_{1t} + \frac{\hat{u}_{2t}\sigma_{O_{At}}}{\sigma} = -\frac{\mu-r}{(\gamma-1)\sigma^2} \\ \frac{\hat{u}_{1t}\sigma}{\sigma_{O_{At}}} + \hat{u}_{2t} = -\frac{\mu_{O_{At}}-r}{(\gamma-1)\sigma_{O_{At}}^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta^{-1} & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} \hat{u}_{1t} \\ \hat{u}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda_{O_{At}} \end{pmatrix}, \qquad (28)$$

en donde se ha denotado mediante, $\zeta = \frac{\sigma_A}{\sigma}$, $\lambda = -\frac{\mu-r}{(\gamma-1)\sigma^2}$ y $\lambda_{O_{At}} = -\frac{\mu_{O_{At}}-r}{(\gamma-1)\sigma_{O_{At}}^2}$. En este sistema, los premios al riesgo son combinación lineal uno del otro, lo cual se identifica porque el determinante $\mathcal{D} = 0$, lo cual era de esperarse puesto que la opción hereda propiedades del proceso subyacente.

## VII. CARACTERIZACIÓN DE LA OPCIÓN ASIÁTICA DE VENTA TIPO AMERICANO

A partir del sistema de ecuaciones en (28), se tiene que:

$$\lambda = \zeta\lambda_{O_{At}} \tag{29}$$

Al sustituir en (29) a $\mu_{O_{At}}$ y $\sigma_{O_{At}}$ dadas en (7), se sigue que:

$$\frac{\partial O_{At}}{\partial t} + \frac{\partial O_{At}}{\partial M_{Gt}} S_t\, ln(S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O_{At}}{\partial^2 S_t}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial O_{At}}{\partial S_t} S_t r - rO_{At} = 0, \tag{30}$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial parcial de segundo orden que es equivalente a la ecuación de Black-Scholes-Merton, con la diferencia de que (30) tiene un término más que representa el promedio del subyacente. Esta ecuación caracteriza la opción asiática de venta americana con precio de ejercicio promedio geométrico del subyacente, a la cual deben de imponer las condiciones de frontera apropiadas a fin de obtener una solución única y tal que la valuación sea de tipo americano, como sigue:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial O_{At}}{\partial t} + \dfrac{\partial O_{At}}{\partial M_{Gt}} S_t\, ln(S_t) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 O_{At}}{\partial^2 S_t}\sigma^2 S_t^2 + \dfrac{\partial O_{At}}{\partial S_t} S_t r - rO_{At} = 0 \\ O_{At}(S_t, M_{Gt}, T) \geq max\left\{e^{\frac{M_{GT}}{T}} - S_T, 0\right\} \\ t \leq \bar{\xi}. \end{cases} \tag{31}$$

donde $\bar{\xi} = min\{\xi, \hat{\xi}\}$, y $\hat{\xi}$ es el tiempo de paro en donde se alcanza el $max\left\{\left(exp\left\{\frac{M_{GT}}{T}\right\} - S_T\right), 0\right\}$.

Para obtener la dinámica de la tasa corta considere la solución de esquina $\hat{u}_{1t}$=1 y $\hat{u}_{2t} = 0$, la cual conduce a partir de la ecuación (26) a:

$$r = \mu - (1-\gamma)\sigma^2. \tag{32}$$

Ahora, a partir de la ecuación (13) del proceso productivo sea $\mu = \tilde{\mu}P_t$ y $(1-\gamma)\sigma^2 = (1-\gamma)\tilde{\sigma}^2 P_t$, de donde en conjunto con (32) se obtiene:

$$r_t = \varphi P_t, \tag{33}$$

con $\varphi = \tilde{\mu} - (1-\gamma)\tilde{\sigma}^2$, por lo que a partir de (13) y (14):

$$\begin{aligned} dr_t &= \varphi dP_t \\ &= \varphi[\alpha(P_t)dt + \beta(P_t)dU_t] \\ &= \varphi\kappa(\theta - P_t)dt + \varphi\nu\sqrt{P_t}dU_t \\ &= \kappa(\varphi\theta - r_t)dt + \sqrt{\varphi}\nu\sqrt{r_t}dU_t. \end{aligned} \tag{34}$$

Al denotar en (32) $a = \kappa, b = \theta\varphi$ y $\delta = \sqrt{\varphi}\nu$, se obtiene la dinámica de la tasa corta:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \delta\sqrt{r_t}dU_t, \tag{35}$$

con $a, b$ y $\delta > 0$. Las propiedades de $r_t$ son descritas por Cox, Ingersoll y Ross (1985b), Brigo y Mercurio (2006), entre otros.

## CONCLUSIONES

Para satisfacer las necesidades de los participantes de los mercados de derivados, las instituciones financieras emiten opciones exóticas además de opciones europeas o americanas sobre diversos subyacentes. Una opción exótica es una opción cuya función de pago es no estándar. Por lo general, no se cotiza en una bolsa ya que se negocian directamente entre empresas y bancos. Una opción asiática es una opción cuyo pago depende del promedio del precio del activo subyacente durante una parte o todo el plazo al vencimiento de la opción. Las opciones asiáticas se negocian activamente en los mercados de divisas, de tasas de interés y materias primas, son derivados dependientes de la trayectoria del subyacente cuyo pago depende explícitamente del precio promedio del subyacente. Su principal ventaja es que disminuye posibles manipulaciones del mercado que pueden suceder cerca de la fecha de vencimiento. En general, cuanto mayor sea el período del promedio, más suave será la trayectoria. En los mercados petroleros se emiten con frecuencia este tipo de derivados para estabilizar flujos de efectivo que surgen del cumplimiento de las obligaciones con los clientes. En el mercado cambiario, estas opciones proporcionan a la tesorería un instrumento de cobertura para una serie de flujos cuyo ejercicio se liquide en efectivo. Para materias primas, como metales industriales, combustibles o granos, entre otros, el promedio es útil para eliminar la sensibilidad extrema del valor al vencimiento de la opción al precio en efectivo del subyacente en una fecha específica.

En el proceso de solución del agente representativo del problema de optimización estocástica se reduce a resolver una ecuación diferencial determinista. La caracterización de la prima de una opción asiática de tipo americano con tasa de interés estocástica se establece con base en supuestos de racionalidad económica y se expresa como la solución a ecuación diferencial parcial. El proceso de tasa corta de interés es de tipo CIR, el cual se determina de manera endógena en el equilibrio. El modelo propuesto incluye funciones de tiempo de paro y una empresa representativa de una economía cuya función de producción también es estocástica.

El hecho de que la forma funcional para los activos de inversión y que las ecuaciones que sustentan al modelo se establezcan como procesos markovianos controlados, que la tasa de interés sea modelada mediante un proceso de reversión a la media permitió por una parte transformar la formulación estocástica del proceso de solución en una ecuación diferencial parcial determinista, y por otra obtener la ecuación diferencial parcial para caracterizar la prima de una opción asiática de tipo americano.

Se plantea en una agenda futura de investigación incorporar formas funcionales de procesos mixtos de difusión con saltos, para precios de activos con/sin volatilidad estocástica y/o tasa de interés estocástica, con el objetivo de recrear ambientes económicos más reales expuestos a riesgo de mercado.

## REFERENCIAS

Arregui A., G. y Vallejo-Alonso, B. (2001). Análisis de la valoración de las opciones asiáticas utilizadas por los fondos de inversión garantizados de renta variable, *Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa*, 7(1),57-70.

Ángeles-Castro, G. y Venegas-Martínez, F. (2010). Valuación de opciones sobre índices bursátiles y determinación de la estructura de plazos de la tasa de interés en un modelo de equilibrio general, *Investigación Económica*, LXIX (271), 43-80. DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fe.01851667p.2010.271.16770

Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Third ed., Oxford: Finance Series.

Björk, T. (2004). *Arbitrage theory in continuous time*. Second Edition, Oxford University Press. DOI:10.1093/0199271267.001.0001

Björk, T., Myhrman, J. y Persson, M. (1987). Optimal consumption with stochastic prices in continuous time, *Journal of Applied Probability*, 24 (1), 35-47.
https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108739

Black, F. y M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654. DOI: 10.1086/260062

Brigo, D. y Mercurio, F. (2006). *Interest rate models: Theory and practice: With smile, inflation, and credit* (2nd ed.). New York: Springer. DOI: 10.1007/978-3-540-34604-3

Broadie M., Glasserman P. y Ha Z. (2000). Pricing American Options by Simulation Using a Stochastic Mesh with Optimized Weights. En: Uryasev S.P. (eds) *Probabilistic Constrained Optimization. Nonconvex Optimization and Its Applications*, vol. 49. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3150-7_2

Cox, J.C. y Ross, S.A. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 145-166. https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90023-4

Cox, J.C., Ingersoll, J.E. y Ross, S.A. (1985a). An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, *Econometrica*, 53(2), 363-384. DOI: 10.2307/1911241

Cox, J.C., Ingersoll, J.E. y Ross, S.A. (1985b). A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53(2), 385-407. DOI: 10.2307/1911242

Cruz-Aké, S. y Venegas-Martínez, F. (2010). Productos derivados sobre bienes de consumo, *EconoQuantum*, 6 (1), 25-54, Zapopan, México. DOI:10.18381/eq.v6i2.124

Detemple, J. y Weidong, T. (2002). The Valuation of American Options for a Class of Diffusion Processes, *Management Science*, 48 (7), 917-937. https://doi.org/10.1287/mnsc.48.7.917.2815

Fouque, J.P. y Chuan-Hsiang H. (2003). Pricing Asian options with stochastic volatility, *Quantitative Finance*, 3(5), 353-362. https://doi.org/10.1088/1469-7688/3/5/301

Gaudenzi, M. Lepellere, M.A. y Zanette, A. (2010). The singular points binomial method for pricing american path-dependent options, *Journal of Computational Finance*, 1(1). DOI: 10.21314/JCF.2010.214

Geske, R. y Shastri, K. (1985). Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20 (1), 45-71. DOI: 10.2307/2330677

Hakansson, N. (1970). Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions, *Econometrica*, 38 (5), 587-607. DOI:10.2307/1912196

Hernández-Lerma, O. (1994). *Lectures on Continuous-Time Markov Control Processes*. Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 3.

Ho, T. y Lee, S. (1986). Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *The Journal of Finance*, 41(5), 1011-1029. DOI: 10.2307/2328161

Hull, J. y White, A. (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, *The Journal of Finance*, 42 (2), 281-300. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1987.tb02568.x

Hull, J. y White, A. (1993a). One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(2), 235-254. DOI: https://doi.org/10.2307/2331288

Hull, J. y White, A. (1993b). Efficient procedures for valuing European and American path-dependent options, *The Journal of Derivatives*, 1 (1), 21–31. https://doi.org/10.3905/jod.1993.407869

Huyên, P. (2009). *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. Springer-Verlag. doi:10.1007/978-3-540-89500-8

Jiang, G. J. y Sluis, P. J. (1999). Pricing stock options under stochastic volatility and interest rates with efficient method of moments estimation. *Research Report 99B31*, University of Groningen, Research Institute SOM (Systems, Organisations and Management).

Jørgensen, P. L. y Hansen, A. T. (1998). Analytical Valuation of American-Style Asian Options, *Management Sciences*, 46 (8). DOI: 10.1287/mnsc.46.8.1116.12027

Karatzas, I. and Shreve, S. (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer.

Keng-Hsin, L., Kehluh, W. y Ming-Feng, H. (2009). Pricing American Asian options with higher moments in the underlying distribution, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223 (1), 304–313 DOI: 10.1016/j.cam.2008.01.012

Kohn, R. (2003). Partial Differential Equations for Finance, notas de curso.

Kohn, R. (2011). Partial Differential Equations for Finance, notas de curso, sección 6.

Li, W. y Chen, S. (2016). Pricing and hedging of arithmetic Asian options via the Edgeworth series expansion approach, *The Journal of Finance and Data Science*, 2 (1), 1-25. https://doi.org/10.1016/j.jfds.2016.01.001

Martínez-Palacios, T., Venegas-Martínez, F., y Martínez-Sánchez, J. (2015). Consumption and portfolio decisions of a rational agent that has access to an American put option on an underlying asset with stochastic volatility, *International Journal on Pure and Applied Mathematics*, 102(4), 711-732. DOI: 10.12732/ijpam.v102i4.10

Martínez-Palacios, T., Ortiz-Ramírez, A. y Martínez-Sánchez, J. F. (2017). Valuación de opciones asiáticas con precio de ejercicio flotante igual a la media aritmética: un enfoque de control óptimo estocástico, *Revista Mexicana de Economía y Finanzas (Nueva Época)*, 12 (3), 389-404. DOI:10.21919/remef.v12i4.240.

Martínez-Palacios, T. y Venegas-Martínez, F. (2014). Un modelo macroeconómico con agentes de vida finita y estocástica: cobertura de riesgo de mercado con derivados americanos, *Economía: Teoría y Práctica*, (41) semestre julio-diciembre de 2014, 71-106. https://doi.org/10.24275/ETYPUAM/NE/412014/Martinez

Merton, R. C. (1971). Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model, *Journal of Economic Theory*, 3(4), 373-413. DOI:10.1016/0022-0531(71)90038-X

Merton, R. C. 1990, 1992. *Continuous-Time Finance*. (rev. ed.). Oxford, U.K.: Basil Blackwell.

Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics*, 4 (1), 141-183. DOI: 10.2307/3003143

Min-Ku Lee, Jeong-Hoon Kim, and Kyu-Hwan Jang, (2014). Pricing Arithmetic Asian Options under Hybrid Stochastic and Local Volatility, *Journal of Applied Mathematics*, 2014, Article ID 784386, 8 p. https://doi.org/10.1155/2014/784386.

Nielsen, J. A. y Sandmann, K. (1996). The pricing of Asian options under stochastic interest rates, *Applied Mathematical Finance*, 3(3), 209-236. DOI: 10.1080/13504869600000011

Ocejo, A. (2018). Asian Option as a Fixed-Point, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 20(2),1-15. DOI: 10.1007/s1178

Ortiz-Ramírez, A. y Martínez-Palacios, T. (2016). Análisis comparativo de valuación de opciones europeas y asiáticas con subyacente promedio y tasa de interés estocástica mediante simulación Monte Carlo, *Revista Contaduría y Administración*, 61 (4), 629-648. DOI:10.1016/j.cya.2016.06.002

Pascucci, A. (2007). Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options, *Finance and Stochastics*, 12 (1), 21-41. DOI: 10.1007/s00780-007-0051-7

Peng, B. y Peng, F. (2010). Pricing Arithmetic Asian Options under the CVE Process, *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 15 (29), 7-13.

Peskir, G. y Uys, N. (2003). On Asian options of American type, *Research report No. 436*, Dept. Theoret. Statist. Aarhus, 19p.

Pirjol, D. y Zhu, L. (2018). Short Maturity Asian options for the CEV model, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1-33. DOI:10.1017/S0269964818000165

Sethi, S. y Thompson, G. (2000). *Optimal Control Theory*. New York, Springer.

Shreve, S. (1997). *Stochastic Calculus and Finance*. Descargable en http://www.stat.berkeley.edu/users/evans/shreve.pdf.

Shuguang, Z., Shuiyong, Y. y Lijun, W. (2006). Prices of Asian Options Under Stochastic Interest Rate, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities Ser. B*, 21(2):135-142. DOI:10.1007/BF02791350

Sierra, G., J. (2007). Procesos Hurst y movimientos brownianos fraccionales en mercados fractales. *Revista de administración finanzas y economía*, 1(1), 1-21. Descargable en http://www2.csf.itesm.mx/egade/web/rafe/2007%201.pdf

Turnovsky, S. J. y Smith, W.T. (2006). Equilibrium consumption and precautionary savings in a stochastically growing economy, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30(2), 243-278. https://doi.org/10.1016/j.jedc.2004.10.006

Vanmaele, M., Deelstra, G., Liinev, J., Dhaene, J. y Goovaerts, M. (2006). Bounds for the price of discrete arithmetic Asian options, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 185(1), 51-90. DOI: 10.1016/j.cam.2005.01.027

Venegas-Martínez, F. (2004). Reforma fiscal incierta y sus efectos en las decisiones de consumo y portafolio: impacto en el bienestar económico, *Problemas de desarrollo, Revista Latinoamericana de Economía*, 35(136), 137-151. De www.jstor.org/stable/43839085

Venegas-Martínez, F. (2005). Política fiscal, estabilización de precios y mercados incompletos. *Estudios económicos*, 20(1), 3-25.

Venegas-Martínez, F. (2006). Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks, *Economic Modelling*, 23(1), 157-173. https://doi.org/10.1016/j.econmod.2005.09.004

Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición, Cengage, México.

Venegas-Martínez, F. (2009). Un modelo estocástico de equilibrio general para valuar derivados y bonos, *EconoQuantum*, 6 (1), 111-120.

Venegas-Martínez F. y Ortiz-Arango F. (2010). Impacto de la política fiscal en un ambiente con inflación estocástica: un modelo de control óptimo, *Morfismos*, 14(1), 51-68. DOI: 10.22201/fe.01851667p.2009.268.37384

Villeneuve, S. (2007). On Threshold Strategies and the Smooth-Fit Principle for Optimal Stopping Problems, *Journal of Applied Probability*, 44(1),181-198. DOI:10.1017/S0021900200002795

Wang, J. y Zhang, Y. (2018). Geometric Average Asian Option Pricing with Paying Dividend Yield under Non-Extensive Statistical Mechanics for Time-Varying Model. *Entropy*, 20 (11) DOI:10.3390/e20110828

Wilmott, P., Howison, S. y Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. New York, USA, Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511812545