Los progresos técnicos y la teoría de Carlos Marx

*Alberto Benítez**

Introducción

Este artículo estudia los efectos de los progresos técnicos sobre los precios, la distribución del ingreso y la tasa de ganancia en un modelo de producción simple (se produce un bien por cada rama industrial).

Se consideran también las consecuencias de estos cambios sobre la relación entre las tasas de explotación y de ganancia. Sobre esta base se evalúa el resultado expuesto originalmente por Marx bajo el enunciado de “ley de la tendencia decreciente de la tasa de ganancia”.[1]

Al considerar varios tipos de progresos técnicos encontramos que la tasa de ganancia es susceptible de disminuir –para un nivel dado de la tasa de explotación– solamente cuando se reduce el volumen del empleo. Además se demuestra que este efecto está acotado dentro de un intervalo de variaciones posibles para la tasa de ganancia cuyos límites no dependen de las cantidades de trabajo utilizadas.

Se identifican así mismo, aquellos cambios técnicos que hacen posible el aumento del límite inferior y/o del superior de este intervalo, y se establece que ninguno de los progresos técnicos considerados los hace disminuir.

Por otra parte, se demuestra que los progresos técnicos ocasionan un aumento del ingreso real de los asalariados en cada nivel dado de la tasa de ganancia.

* Profesor-Investigador del Departamento de Economía de la UAM-Iztapalapa.

[1] Véase Marx (1985), Tomo III, tercera sección.

Así ocurre incluso en el caso de que se produzca un incremento simultáneo en la tasa de explotación.

Considerando al conjunto de los efectos de los distintos tipos de progresos técnicos sobre la distribución del ingreso, se llega a la conclusión general de que estos tienen un resultado opuesto al previsto por la mencionada ley.

1. Los precios de producción

Para el caso se estudiará una economía en la que se producen n bienes, uno en cada rama de la producción. A cada cual le corresponde un índice particular representado mediante la notación k o j de tal forma que $k, j = 1,2,3...n$. Al trabajo utilizado en la industria k, se le asignara la notación l_k y las cantidades de este bien serán medidas en unidades de salario, al igual que los precios unitarios de los demás bienes que serán representados mediante la notación p_j para cada j.

Para simplificar la exposición supondremos que se utiliza la cantidad total producida de cada bien en el periodo considerado como la unidad de medida del bien correspondiente, de tal forma que se produce una unidad de cada bien. Por su parte, la unidad de medida del trabajo será el salario correspondiente a un cierto tipo de trabajo (seleccionado arbitrariamente), durante el periodo de referencia. A ella nos referiremos como la unidad de salario.

De igual forma, partiremos del supuesto de la inexistencia de capital fijo, de que todas las compras se hacen al principio y las ventas al final del periodo, fecha en la que también se paga el trabajo.

Para cada pareja (k, j) sea a_{kj} el número de unidades del bien j que participan directamente en la producción de una unidad del bien k y sea r la tasa de ganancia con capitalización simple del periodo. De acuerdo con lo anterior, el costo de la participación del bien j en la producción del bien k está determinado por el producto:

$$a_{kj}\, p_j(1 + r)$$

Supondremos que para la producción de cada bien se necesita, además del trabajo, la participación de al menos un bien producido por lo cual, para cada k se verifica que $a_{kj} > 0$ para al menos un j y también que $l_k > 0$.

De esta forma, si todas las industrias obtienen la misma tasa de ganancia, la relación entre los costos y el valor de la producción está definida por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\Sigma_j\, a_{kj}p_j(1 + r) + l_k = p_k \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

De acuerdo con Hawkins y Simon (1949), se dice que un sistema de este tipo es productivo si la cantidad total de cada bien que participa en la producción de una unidad del mismo bien es menor que uno. En este caso se verifica el siguiente resultado.

Teorema 1. Si el sistema (1.1) es productivo, entonces existe un intervalo de la tasa de ganancia [O, R[donde: a) $R > O$, b) para todo valor de r contenido en este intervalo el sistema determina una solución única, en la cual $p_j > 0\ \forall\ j$ y c) el valor de la unidad de salario tiende a cero, medida con al menos uno de los bienes, cuando r tiende a R.

Prueba: véase Benítez (1995).

2. La distribución del ingreso y la tasa de ganancia

El sistema (1.1), permite establecer la distribución del producto neto entre el total de los salarios (w) y las ganancias para cada valor de r. Para ello se suman verticalmente cada una de sus ecuaciones, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\Sigma_k\, \Sigma_j\, a_{kj}p_j(1 + r) + \Sigma_k\, l_k &= \Sigma_k p_k \\
\Sigma_k\, \Sigma_j\, a_{kj}p_j\, r + \Sigma_k\, l_k &= \Sigma_k p_k - \Sigma_k\, \Sigma_j\, a_{kj}p_j \\
&= \Sigma_j p_j - \Sigma_j\, \Sigma_k\, a_{kj}p_j \\
\Sigma_k\, \Sigma_j\, a_{kj}p_j\, r + \Sigma_k\, l_k &= \Sigma_j(1 - \Sigma_k a_{kj})p_j
\end{aligned} \tag{2.1}$$

El primer término de (2.1) es la ganancia correspondiente a la inversión realizada, el segundo el monto de los salarios pagados y el término de la derecha es el valor del producto neto.

Para cada j se representará con c_j el excedente producido del bien correspondiente, de tal forma que $c_j = 1 - \Sigma_k\, a_{kj}$ para cada bien. Supondremos que $c_j \oplus 0\ \forall$ j y que la desigualdad se cumple para al menos un j.

Dividiendo los dos términos de (2.1) por el producto neto se obtiene:

$$\Sigma_k\, \Sigma_j\, a_{kj}p_j\, r/\Sigma_k\, c_k p_k + \Sigma_k\, l_k/\Sigma_k\, c_k p_k = 1$$

Para simplificar la notación, se define:

$$K = \Sigma_k\, \Sigma_j\, a_{kj}p_j/\Sigma_k\, c_k p_k \qquad \text{y} \tag{2.2}$$

$$w = \Sigma_k\, l_k / \Sigma_k\, c_k p_k \tag{2.3}$$

lo que permite escribir (2.1) de la forma siguiente:

$$Kr + w = 1 \tag{2.4}$$

Las siguientes propiedades de w como función de r son bien conocidas, pero conviene recordarlas aquí para lo que a continuación trataremos: a) el primer término de (2.1) se anula cuando $r = 0$, por lo que $w = 1$ para este valor de r, b) los precios medidos en unidades de salario (o de trabajo) son funciones monótonas crecientes de r por lo que w es una función monótona decreciente de r en el intervalo $[O, R[$[2] y, c) cuando r tiende a R el precio de al menos un bien, tiende al infinito, lo cual hace que w tienda a cero en este caso.[3]

Estas propiedades se pueden apreciar en cualquiera de las figuras presentadas más adelante, en la sección 5.

Por otra parte, dado que w es una función monótona decreciente de r, existe una función inversa $r = r(w)$, la cual es también monótona decreciente y disminuye en el intervalo $]R,O]$ cuando w aumenta en $]O, 1]$. Se representa a esta relación en el segundo cuadrante de la Figura 3.1.

3. La tasa de explotación y la distribución del ingreso

La obra de Marx ha generado una abundante literatura que –entre otras cosas– propone diversas maneras de interpretar el concepto de valor.

Para los fines de este artículo resulta necesario adelantar algunas hipótesis que permitan establecer una relación cuantitativa entre la tasa de explotación y la distribución del ingreso.

De acuerdo con Marx el valor creado durante un proceso de producción es igual a la cantidad de trabajo abstracto efectuado en el mismo. Ahora bien, el trabajo abstracto es aquel que "se realiza" cuando sus productos encuentran salida en el mercado.[4]

Por ello resulta útil la siguiente hipótesis: todos los bienes producidos durante el periodo considerado encuentran comprador en el mercado.

Por otra parte, los bienes no se venden generalmente a sus valores, más bien –y particularmente en el modelo aquí estudiado– a sus precios de producción.

[2] Sobre los precios salariales y *w* véase Sraffa (1960).
[3] Véase Benítez (1995).
[4] Marx (1985: vol. 1, primera sección).

Por este motivo, aunque un bien se venda puede recibirse a cambio de él una cantidad de valor distinta al tiempo de trabajo que costó producirlo.

Sin embargo, si todos los bienes se venden en una economía cerrada, la totalidad del trabajo concreto se "realiza" independientemente de la falta de equivalencia en los intercambios.

En otro aspecto, es conveniente adoptar también la hipótesis siguiente: el capital físico es el mismo al principio y al final del periodo.

En efecto, de acuerdo con Marx el valor del capital constante sólo se transfiere al valor del producto. Por dicha razón esta hipótesis –junto con la anterior– nos garantiza que el valor creado durante el periodo es igual al valor de la colección de bienes que integran el producto neto.

Dada esta igualdad, la fracción de dicho valor que corresponde a los salarios, es decir w, es igual a la fracción del valor creado que Marx llama "tiempo de trabajo necesario". Por su parte, lo que corresponde a la ganancia, es decir $1 - w$, es igual a la fracción del valor creado que corresponde al "tiempo de trabajo excedente".

De acuerdo con lo anterior, la tasa de explotación (ρ) se encuentra determinada por la ecuación:

$$\rho = (1 - w)/w \tag{3.1}$$

Lo que nos indica que ρ es una función monótona decreciente de w con dominio en el intervalo $]O,R]$ y con rango en $]O, \times]$. Esto implica que existe una función inversa $w = w(\rho)$ con dominio en $[O, \times[$ y con rango en $]0,1]$. La cual se puede obtener despejando w en (3.1):

$$w = 1/(\rho + 1) \tag{3.2}$$

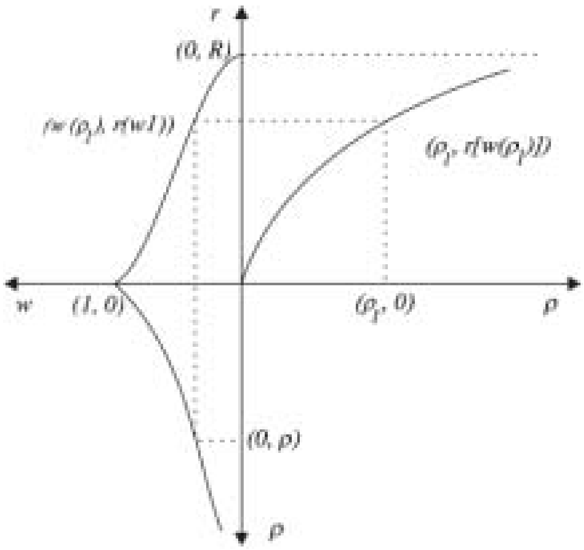
Las dos funciones son equivalentes para el análisis matemático aunque describen aspectos distintos del mismo fenómeno económico. Se les puede apreciar en el tercer cuadrante de la Figura 1, considerando como variable independiente y de manera alternativa, tanto a la que se mide en el eje vertical como a la que existente en el horizontal.

Conviene observar que las relaciones que se han establecido dependen sólo de la proporción en la cual el valor creado se divide en aquellas dos fracciones de tiempo de trabajo señaladas. No dependen por lo tanto de la magnitud de dicho valor.

Esto tiene interés porque la medición establecida es válida independientemente del tipo de trabajo que se haya llevado a cabo, ya sea simple o complejo. También de la posibilidad de establecer una equivalencia entre estos últimos.

Así mismo cabe destacar que es independiente de la relación entre las cantidades de trabajo (abstracto y concreto), utilizadas en la producción y los precios particulares de cada bien.

Figura 1



Por otra parte, la relación entre la tasa de explotación y la tasa de ganancia se puede expresar mediante la fórmula $r = r[w(\rho)]$. De acuerdo con las definiciones que hemos dado de w como función de r y de r como función de w se infiere que r es una función monótona creciente de ρ cuyo rango es el intervalo *[O, R[* y con dominio en *[O, ×[*.

En la Figura 1 se representa la función compuesta $r = r[w(\rho)]$. Los valores de ρ se indican en las semirrectas que parten del origen hacia abajo y hacia la derecha, los de w en el semieje horizontal izquierdo y los de r en el semieje restante, todos con signo positivo.

A cada nivel ρ_1 de la tasa de explotación corresponde un punto de la función $w(\rho)$ que se presenta en el tercer cuadrante. A su vez a este corresponde otro de la función $r(w)$ en el segundo cuadrante y, a este último, corresponde otro de la función $r(\rho)$ en el primer cuadrante. Esta última función tiene como asíntota la recta horizontal de altura igual a R.

4. Definición de los progresos técnicos y sus efectos sobre los precios

Dada la diversidad de los cambios tecnológicos posibles restringiremos nuestro análisis a aquellos que son equivalentes a la substitución de un plan de producción por otro más eficiente, de acuerdo con la definición de eficiencia usual en la economía matemática contemporánea.[5]

De esta manera consideraremos sólo aquellos cambios que caben dentro de la definición siguiente:

Una industria aumenta su productividad si disminuye la cantidad de al menos uno de los insumos aprovechados o, bien, si aumenta la cantidad de bienes que ofrece sin que varíen, en el primer caso, los otros insumos ni la cantidad producida, y en el segundo, los insumos utilizados.

Estos cambios tienen la propiedad –no exclusiva de ellos– de que la cantidad total de trabajo utilizado directamente y en forma indirecta en la producción de al menos un bien disminuye, sin que aumente la cantidad utilizada en la producción de ningún otro bien.

La proposición siguiente expone los efectos de un progreso técnico sobre los precios de los bienes producidos.

Teorema 2. Para todo $r \varepsilon [O, R[$ un incremento en la productividad disminuye el precio de los bienes, en cuya producción participa (en forma directa y/o indirectamente) la rama en donde ha tenido lugar el incremento. Los demás precios no se alteran.

Prueba: véase el Apéndice A.1.

Como se señala en Benítez (1995), algunos incrementos en la productividad hacen que la tasa de ganancia máxima (R) aumente, mientras que otros no la afectan. Sin embargo, para simplificar la exposición supondremos que R no se altera, salvo cuando se indique lo contrario.

[5] Véase Takayama (1985).

5. Efectos de los progresos técnicos sobre la relación entre *w* y *r*

Para facilitar las referencias distinguiremos tres tipos de progresos técnicos: a) los que disminuyen la cantidad requerida de un bien producido que es utilizado en alguna industria o bien aumentan la cantidad producida de uno de estos bienes, b) los que aumentan la cantidad producida de un bien destinado exclusivamente al consumo, y c) los que disminuyen la cantidad de trabajo que se requiere para producir algún bien.

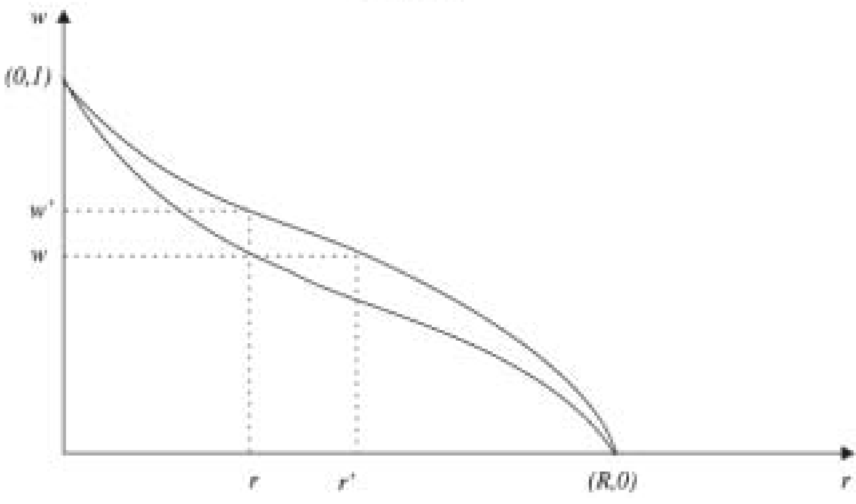
A continuación analizaremos los efectos de cada tipo de cambio tecnológico sobre w, bajo el supuesto de que el único cambio ocurrido es el señalado en cada caso y de que se mantiene fijo el valor de r.

5.1 Cambios de tipo A

Estudiaremos sucesivamente las dos modalidades en las que se pueden presentar este tipo de cambios.

5.1.1 Disminuye la cantidad requerida de un bien producido que se ocupa en la industria h.

Figura 2



En este caso, de acuerdo con el Teorema 2 ningún precio aumenta. Por lo tanto, si $r > O$, al menos uno de los sumandos del primer término de lado izquierdo

(2.1) disminuye, sin que ninguno aumente y sin afectar el segundo sumando del mismo lado. Lo cual implica que el lado derecho de esa ecuación también disminuye.

En consecuencia, la suma de los salarios aumenta con relación al segundo miembro de la ecuación, lo que significa que w será más grande para cada valor de $r \; \varepsilon \; [O, R[$. Al mismo tiempo, el valor de r correspondiente a cada nivel de $w \; \varepsilon \; [O,1[$ será también mayor. Véase la Figura 2.

Conviene ilustrar lo anterior con un ejemplo numérico.

Ejemplo 1. Considérese una economía que produce un solo bien con ayuda de una unidad de trabajo y de media unidad del mismo bien. Si los precios se miden con el producto neto, la ecuación de producción es la siguiente:

$$(1/2)p_1(1 + r) + w = p_1 \tag{5.1}$$

Supondremos que en un momento dado, w es igual a °. Puesto que el valor del producto neto es igual a $(1/2)\ p_1$ se verifica la relación $w = (1/4)\ p_1$. Substituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$(1/2)p_1(1 + r) + (1/4)\ p_1 = p_1$$

De lo que se infiere que $r =$ °.

Supondremos que un progreso técnico viene a disminuir a ˘ la cantidad requerida del bien 1 en la producción. La ecuación de producción se escribiría ahora de la forma siguiente:

$$(1/4)p_1(1 + r) + w = p_1 \tag{5.2}$$

El producto neto habrá aumentado siendo ahora igual $(3/4)p_1$ por lo cual, si w sigue siendo igual a ° se verifica ahora la relación $w = (3/8)p_1$. Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior se obtiene:

$$(1/4)p_1(1 + r) + (3/8)\ p_1 = p_1$$

De donde se infiere que $r = 3/2$, demostrando que aumentó con el incremento en la productividad.

5.1.2 Aumenta la cantidad producida de un bien *h* que participa en la producción de al menos un bien.

En este caso el precio del bien h disminuye, de acuerdo con el Teorema 2, sin que ningún precio aumente. En consecuencia, si $r > 0$ disminuye al menos uno de los sumando del primer término del lado izquierdo en la ecuación (1.2) sin que el segundo término del mismo lado se altere. Por lo tanto ocurre exactamente lo mismo que se señala en el caso anterior.

Lo que precede se ilustra con el siguiente caso particular.

Ejemplo 2. Considérese la situación descrita en el ejemplo1 antes del cambio en la productividad, cuando *r* = ° si *w* = *1/2*.

Supongamos esta vez que un progreso técnico duplica la cantidad producida sin que se modifiquen los insumos. La nueva ecuación de producción será:

$$(1/2)p_1(1 + r) + w = 2p_1 \tag{5.3}$$

Si tomamos ahora como unidad de medida de las cantidades del bien a la totalidad de la nueva producción, esta ecuación se escribiría igual que la ecuación (5.2). Por este motivo, la tasa de ganancia que corresponderá a *w* = ° será también *3/2*.

El lector puede corroborar lo anterior resolviendo directamente a partir de la ecuación (5.3), según el procedimiento expuesto en el ejemplo anterior.

5.2 Cambios de tipo B

A continuación consideraremos el aumento en la cantidad producida de un bien *h*, que no participa en la producción de ningún bien.

En este caso, ninguno de los dos términos del lado izquierdo de (2.1) se altera, por lo cual el valor de *w* no sufre ningún cambio, como se puede apreciar en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3. Tomaremos la economía descrita por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1/2)p_1(1 + r) + (1/2)w &= p_1 \\ (1/4)p_1(1 + r) + (1/2)w &= p_2 \end{aligned} \tag{5.4}$$

En este caso el producto neto equivale a $(1/4)p_1 + p_2$, por lo cual, si la mitad del mismo corresponde a los salarios se verifica la relación $w = (1/8)p_1 + (1/2)p_2$.

Substituyendo el valor de *w* en el sistema (5.4) se obtiene, después de simplificar:

$$\begin{aligned} (7 - 8r)p_1 - 4\,p_2 &= 0 \\ -(5 + 4r)p_1 + 12p_2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Resolviendo este sistema se obtiene $r = .597$.

Supondremos ahora que un progreso técnico permite duplicar la cantidad que se produce del bien 2 sin que nada más cambie. El nuevo sistema de ecuaciones de producción se escribiría de la forma siguiente:

$$(1/2)p_1(1 + r) + (1/2)w = p_1 \qquad (5.6)$$
$$(1/4)p_1(1 + r) + (1/2)w = 2p_2$$

El nuevo producto neto equivale a $(1/4)p_1 + 2p_2$, por lo cual, si la mitad del mismo corresponde a los salarios se verifica la relación $w = (1/8)p_1 + p_2$.

Substituyendo el valor de w en el sistema (5.6) se obtiene, después de simplificar:

$$(7 - 8r)p_1 - 8\,p_2 = 0$$
$$-(5 + 4r)p_1 + 24p_2 = 0$$

Por las propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales, se sabe que al dividir los coeficientes de una columna por un número positivo, la solución no se altera. Podemos por lo tanto dividir entre *2* los coeficientes de p_2 en este sistema obteniendo así de nueva cuenta el sistema (5.5), lo que demuestra que la tasa de ganancia no cambia.

Obsérvese que la división que acabamos de efectuar equivale a duplicar la unidad de medida de las cantidades del bien *2*, lo cual, como se señaló en el ejemplo 2, no tiene por qué afectar la tasa de ganancia.

5.3 Cambios de tipo C

Para estudiar el efecto de una disminución en la cantidad de trabajo utilizada en una industria *h*, conviene distinguir las dos situaciones que se analizan a continuación.

5.3.1: El bien *h* no participa en la producción de ningún bien

En este caso disminuye el segundo término del lado izquierdo de (2.1) sin que el primero se vea afectado. En consecuencia, el valor de w será más pequeño para cada nivel de $r \,\varepsilon\, [O,R[$ y, al mismo tiempo el valor de r será más pequeño para cada $w \,\varepsilon\,]O,1[$. Véase la Figura 3.

Ejemplo 4. Tomaremos como punto de partida la situación descrita en el Ejemplo 3 antes del cambio de productividad, donde w = ° cuando $r = .597$.

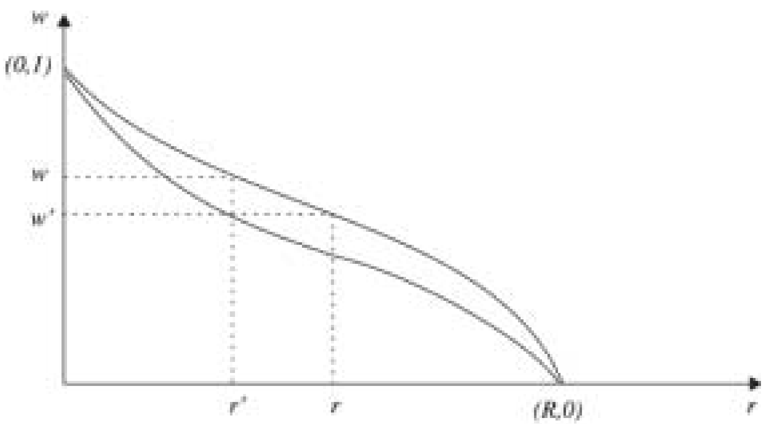
Supongamos que se logra disminuir a ˘ el número de unidades de trabajo utilizadas en la producción del bien 2 sin que se modifiquen los demás coeficientes del sistema 5.4. Si los precios se miden en unidades de salario, a la nueva situación corresponde el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1/2)p_1(1 + r) + {}^{\circ} = p_1 \qquad (5.7)$$
$$(1/4)p_1(1 + r) + 1/4 = p_2$$

Calculando los precios para $r = .597$ resulta $p_1 = 2.48$ y $p_2 = 1.24$.

Dado que el nuevo producto neto es igual a $(1/4)p_1 + p_2$ su valor en unidades de salario es de 1.86. Por su parte, los trabajadores reciben ahora solamente .75 unidades de salario, por lo cual el valor de w medido con el producto neto será igual a $.75/1.86$, es decir habrá descendido a $.4$.

Figura 3



5.3.2 El bien *h* participa en la producción de al menos un bien.

En este caso, tanto el primero como el segundo término del lado izquierdo de (2.1) se verán disminuidos. En consecuencia, *w* será más grande o bien más pequeña según la proporción en la que el bien *h* afecte el valor del capital.

Como a su vez lo anterior depende del nivel particular de r, puede ocurrir que el mismo cambio técnico haga crecer w para ciertos niveles de r, en tanto que para algunos otros la haga disminuir.

Para ilustrar esta situación se presenta a continuación un caso particular.

Ejemplo 5. Considerémos el siguiente sistema de producción:

$$\begin{aligned} p_1(1 + r) + 1 &= 2p_1 \\ p_1(1 + r) + l_2 &= p_2 \\ p_2(1 + r) + 6 &= p_3 \end{aligned} \tag{5.8}$$

En este sistema el producto neto es igual a una unidad del bien *3* y, por otra parte, la tasa máxima de ganancia es igual a *1*.

Supongamos que el progreso técnico consiste en la disminución de la cantidad de trabajo utilizada en la segunda industria. Para estudiar el efecto de este cambio sobre la relación entre r y w expresaremos primero el valor de w como función de l_2.

Substituyendo p_2 en la tercera ecuación de (5.8) por su costo de producción, se obtiene:

$$p_3 = [p_1(1 + r) + l_2](1 + r) + 6 \tag{5.9}$$

Por otra parte, de la primera ecuación del mismo sistema se infiere la relación:

$$p_1 = 1/(1 - r)$$

Substituyendo ahora en (5.9) p_1 por el lado derecho de esta última ecuación se establece una fórmula que expresa el valor del producto neto como función de r y de las cantidades de trabajo utilizadas. Después de simplificar, resulta:

$$p_3 = (1 + r)^2/(1 - r) + l_2(1 + r) + 6 \tag{5.10}$$

Substituyendo en (2.3) el denominador por el lado izquierdo de esta ecuación y el numerador por la suma de las cantidades de trabajo del sistema (5.8) se obtiene:

$$w = [7 + l_2]/[(1 + r)^2/(1 - r) + l_2(1 + r) + 6]$$

Que expresa w como función de l_2 y de r. Derivando con respecto a l_2 y substituyendo el denominador por el lado izquierdo de (5.10) resulta:

$$w'(l_2) = [(1 + r)^2/(1 - r) + l_2(1 + r) + 6 - (l_2 + 7)(1 + r)]/ p_3^2$$

Después de simplificar el numerador la fórmula anterior queda de la forma siguiente:

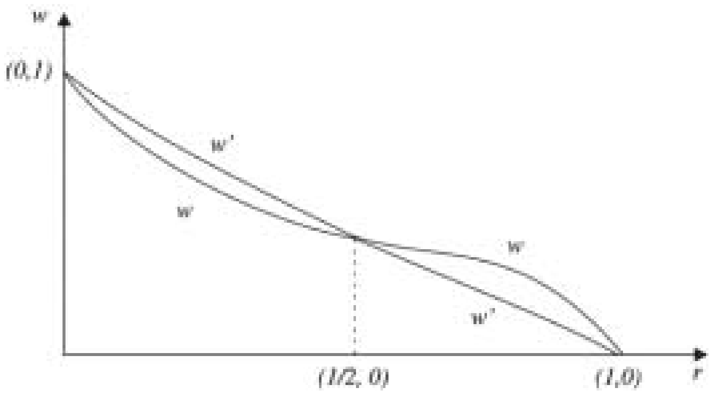
$$w'(l_2) = [(8r^2 - 4r)/(1 - r)] / p_3^2$$

El signo de la derivada está determinado por el numerador del lado izquierdo, su valor depende del nivel de r y es independiente del valor de l_2. Es igual a cero cuando $r =$ °, menor que cero cuando $r\ \varepsilon\ ]0,1/2[$ y mayor que cero cuando $r\ \varepsilon\ ]1/2,1[$.

En consecuencia, w aumenta cuando se reduce l_2, si r se encuentra en el primer intervalo mencionado, disminuye si r está en el segundo y no se altera si $r =$ °.

Se ilustra lo anterior en la Figura 4, en donde w y w' representan el valor del salario, respectivamente antes y después del cambio técnico.

Figura 4



6. Límite para la disminución de la tasa de ganancia al disminuir las cantidades de trabajo utilizado

De los tres tipos de progresos técnicos estudiados en la sección anterior, solamente los de tipo C son susceptibles de hacer disminuir la tasa de ganancia correspondiente a algún nivel de *w*, aunque no lo hacen en todos los casos y pueden inclusive producir el efecto contrario.

Sin embargo, dada esa posibilidad conviene aclarar hasta qué grado las reducciones en la cantidad de trabajo utilizado pueden disminuir el valor de *r*, cuando se mantiene constante la tasa de explotación.

En esta situación, dicha disminución está acotada por el límite establecido en el siguiente resultado.

Teorema 3. Dado un sistema de tipo (1.1) sea **K** la mínima cota superior para *K* como función de las variables *r* y l_k $(k = 1,2,...,n)$ definidas sobre los intervalos $[0,R[$ y (para cada *k*) $]0,\times[$ respectivamente. Entonces:

independientemente de las cantidades de trabajo utilizadas

c) los progresos de tipo A disminuyen o bien no alteran el valor de **K**, mientras que los de tipo B o C no lo afectan,

d) la disminución de **K** señalado en c) aumenta el límite inferior del intervalo presentado en b) y en algunos casos también el superior, sin que exista una cota superior para estos incrementos.

a) **K** es un número real superior a cero,

b) para cada nivel dado de *w* se verifica:

$$r \; \varepsilon \; [(1 - w)/\mathbf{K}, R] \tag{6.1}$$

y, para el nivel correspondiente de ρ:

$$r \; \varepsilon \; [(\rho/(\rho + 1)\mathbf{K}, R] \tag{6.2}$$

Prueba. Véase el Apéndice A.2.

Se representa el significado de este teorema mediante las Figuras que aparecen en la sección siguiente. Aquí nos limitaremos a exponer dos ejemplos numéricos:

Ejemplo 6. Retomando el caso estudiado en el Ejemplo 3. El producto neto es igual $(1/4)p_1 + p_2$ y el capital es $(3/4)p_1$, por lo tanto:

$$K = (3/4)p_1/[(1/4)p_1 + p_2] \tag{6.3}$$

En este caso el valor del capital (*K*), puede cambiar por una variación de *r* o del número de unidades de trabajo utilizadas, como se puede apreciar en el Ejemplo 4.

Sin embargo, existe una cota superior para K. Para establecerla iniciaremos por sustituir en (6.3) el precio del bien *2* por su costo de producción, se obtiene:

$$K = (3/4)p_1/[(1/4)p_1 + (1/4)p_1(1 + r) + (1/2)w\ ] \qquad (6.4)$$
$$= (3/4)p_1/[(\ 1/2 + (1/4)r)p_1 + (1/2)w\ ]$$

Dado que w y r son siempre positivas se sigue que K será siempre inferior al valor determinado por la ecuación anterior cuando r y la cantidad de trabajo utilizada en la segunda industria sean iguales a cero. De esta manera:

$$K \leq (3/4)p_1/(1/2)p_1 = 3/2$$

Para demostrar que 3/2 es la mínima cota superior para los valores de K, representaremos con l_2 la cantidad de trabajo utilizada en la segunda industria. Por otra parte, cuando $r = 0$, la primera ecuación de (5.4) permite establecer la equivalencia $w = p_1$. En consecuencia, para este valor de r es posible sustituir en la segunda ecuación de dicho sistema el costo salarial por l_2p_1, lo que a su vez permite escribir (6.4) de la forma siguiente:

$$K = (3/4)p_1/[(1/2)p_1 + l_2\ p_1]$$

Esta expresión permite advertir que, haciendo disminuir suficientemente la cantidad de trabajo utilizada en la rama dos, los valores de K determinados por (6.4) pueden acercarse a 3/2 tanto como se desee. En consecuencia, $\mathbf{K} = 3/2$.

Dado que $R = 1$, al sustituir por este valor y por *3/2* las variables correspondientes en (6.1) y en (6.2) se obtiene:

$$r\ \varepsilon\ [(1 - w)(2/3),1] = [2\rho/3(\rho + 1),1] \qquad (6.5)$$

Estas fórmulas indican los límites inferior y superior, entre los que se encuentra r para cada nivel dado de w o de ρ. Para ilustrar esto retomaré el Ejemplo 3.

De acuerdo con lo que allí se expone, cuando $w =\ ^{\circ}$ la tasa de ganancia es *.597*. Al disminuir a la mitad la cantidad de trabajo utilizada en la segunda industria, la situación corresponde al sistema (5.7).

Si w se mantiene igual a $^{\circ}$ seguirá siendo equivalente a $(1/8)\ p_1 + p_2$, pero esta canasta corresponde ahora a una cantidad de trabajo menor, por lo que habrá aumentado el salario real (véase la sección siguiente). Al distribuir esta colección de bienes proporcionalmente a las cantidades de trabajo utilizadas en cada rama corresponderán las dos terceras partes a la primera y el resto a la segunda.

Substituyendo el ingreso de los asalariados con estas cantidades en (5.7) se obtiene, después de simplificar:

$$[(5/12) - (r/2)]\, p_1 - (2/3)p_2 = 0$$
$$-[(7/24) + (4/r)]\, p_1 + (5/3)\, p_2 = 0$$

Resolviendo resulta $r = .5$.

De esta forma la tasa de ganancia disminuyó de $.597$ a $.5$ como consecuencia de la reducción en el nivel del empleo.

Este resultado concuerda con el inciso b) del Teorema 3 ya que, cuando $w =$ °, r no puede ser inferior a $1/3$. Lo cual se determina substituyendo w por ° en el primer intervalo de (6.5) y ρ por 1 en el segundo.

Por otra parte, un cambio de tipo A disminuiría el coeficiente de p_1 en el numerador de (6.4) o bien aumentaría al primer sumando del coeficiente de p_1 en el denominador de la misma fórmula. Por lo tanto, **K** disminuiría como se señala en el inciso c) del Teorema 3.

Ejemplo 7. Considérese el sistema siguiente:

$$(1/n)\, p_1(1 + r) + 1/n = p_1 \tag{6.6}$$

Que permite conocer los precios en unidades de salario para cada valor dado de n, el cual –conforme se incrementa la productividad– adopta la serie de los números naturales a partir de 2.

El valor de K está determinado por la relación:

$$(1/n)\, p_1 /(1 - 1/n)\, p_1 = 1/(n - 1) \tag{6.7}$$

Dado que R corresponde al nivel cero de salario, se verifica la ecuación siguiente:

$$(1/n)\, p_1(1 + R) = p_1 \tag{6.8}$$

De la que se infiere que $R = n - 1$.

En consecuencia, según (6.1), para cada nivel de w se verifica:

$$r\ \varepsilon\ [(1 - w)(n - 1),\ n - 1]$$

Esta relación permite observar que al disminuir la cantidad de trabajo y de capital en la misma proporción, el valor de *r* correspondiente a cada nivel de *w* crece sin que haya una cota superior para esta evolución.

7. Efecto combinado de los progresos técnicos sobre las relaciones entre *r* y *w* y entre *r* y *ρ*

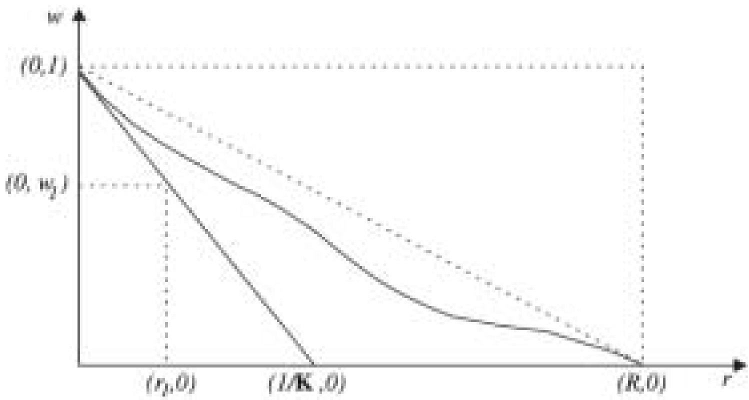
Las Figuras que se presentan en esta sección permiten visualizar el efecto de los distintos tipos de progresos técnicos sobre las funciones *w(r) y r(ρ)*.

A continuación señalaremos algunos efectos inmediatos de los cambios técnicos sobre dichas funciones y, más adelante, se mostrarán varias consecuencias de una sucesión de estos cambios sobre las mismas.

7.1 Consecuencias inmediatas de los progresos técnicos

El segmento de recta *[(0,1),(1/***K***,0]* en la Figura 7.1 se construyó con base en la relación (6.1). La abscisa de cada punto de este segmento (r_1) indica el valor del límite inferior del intervalo correspondiente a cada nivel de la distribución del ingreso (w_1).

Figura 5



Por lo tanto, la gráfica de *w* como función de *r* se situará en el cuadrilátero delimitado por el segmento señalado y por el segmento *[(R,0),(R,1)]*.

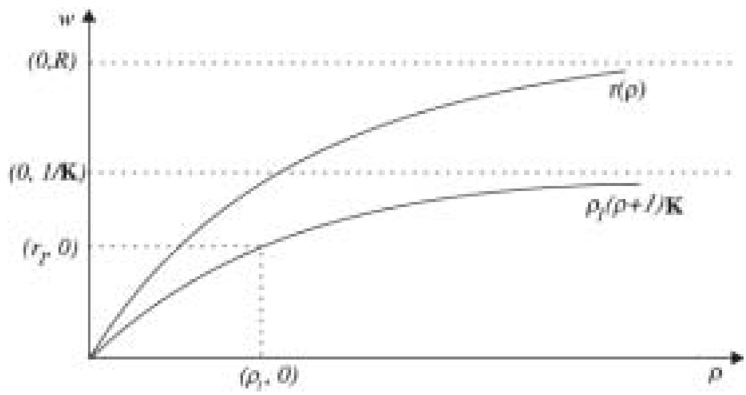
De acuerdo con el Teorema 3, algunos progresos técnicos de tipo A disminuyen el valor de **K**, mientras que otros no lo alteran. En el caso de los primeros se produce un desplazamiento hacia la derecha el punto *(1/***K***,O)*.

En consecuencia, estos progresos ocasionan el estrechamiento de la base del cuadrilátero irregular presentado en la Figura 5 y, en el caso de que produzcan también un incremento de *R*,[6] se da un desplazamiento de esta base hacia la derecha.

Por su parte, la disminución en las cantidades de trabajo utilizadas puede ocasionar el desplazamiento de la curva de *w(r)* hacia el lado izquierdo del cuadrilátero. Aunque esto no ocurre en todos los casos y en algunos se podría presentar el efecto opuesto.

Por otra parte, en la Figura 6 se representa la relación (6.2):

Figura 6



El límite inferior del intervalo correspondiente a cada nivel de la tasa de explotación (ρ_1) está indicado por la altura de la curva $\rho/(\rho+1)$**K** en ese punto (r_1). Esta curva es monótona creciente y tiene como asíntota la recta horizontal de ordenada igual a *1/***K**. El límite superior del mismo intervalo, para todos los valores de *r*, está representado por la recta horizontal de ordenada igual a *R*.

[6] *R* aumenta sólo con aquellos cambios de tipo A que aumentan la tasa de reproducción física del sistema. Véase Von Neuman (1945).

De esta manera, la curva de $r(\rho)$ se ubicará entre la curva y la segunda recta que se mencionan en el párrafo anterior.

Los cambios de tipo A que disminuyen el valor de **K** provocan el desplazamiento hacia arriba de la curva $\rho/(\rho + 1)\mathbf{K}$ para cada nivel de $\rho > 0$, mientras que los de tipo C desplazan hacia abajo la curva correspondiente a $r(\rho)$.

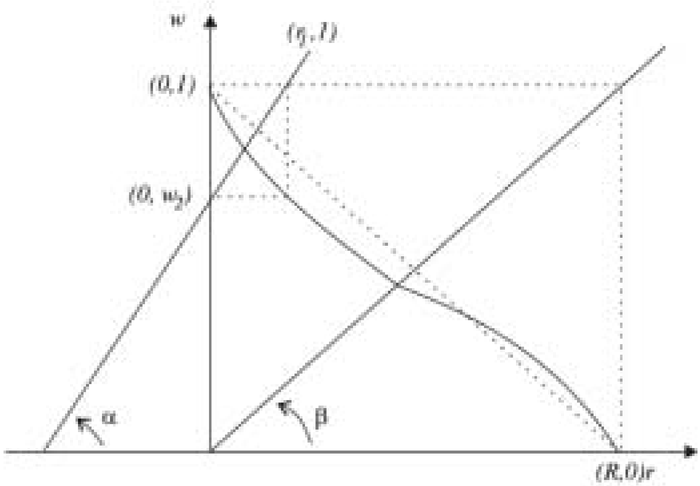
Aunque esto último no ocurre necesariamente para todos los valores de *r* se puede prever que las dos curvas tienden a acercarse como consecuencia de los diferentes tipos de progresos técnicos. En efecto, los cambios de tipo A tienden a desplazar hacia arriba el intervalo $[(0,1/\mathbf{K}),(0,R)]$ –por las razones que se apuntaron al comentar la Figura 7.1– lo que produce este acercamiento.

7.2 Efectos de una secuencia prolongada de progresos técnicos

De acuerdo con lo señalado, si se considera una sucesión suficientemente larga de los tres tipos de cambios estudiados, la Figura de $w(r)$ se acercará al segmento $[(0,1),(1/\mathbf{K},0)]$ por lo que tenderá a ubicarse entre éste y la diagonal principal del cuadrilátero representado en la Figura 7.

Por otra parte, como el segmento $[(1/\mathbf{K}),R]$ se aleja del eje vertical hacia la derecha, el ángulo formado por la diagonal principal y el segmento $[(0,1),(1/\mathbf{K},0)]$ se reducirá cada vez más, lo que acercará a la gráfica de $w(r)$ a la diagonal principal.

Figura 7



Por lo tanto, si los progresos técnicos se dan en la medida suficiente la curva de $w(r)$ tenderá a confundirse con el segmento $[(0,1),(R,0)]$. A continuación señalaré tres consecuencias de esta evolución:

a) Las variaciones de r afectarán menos el valor del capital.

En efecto, se infiere de (2.4) que para cada punto (w_1,r_1) de la función $w(r)$ se verifica:

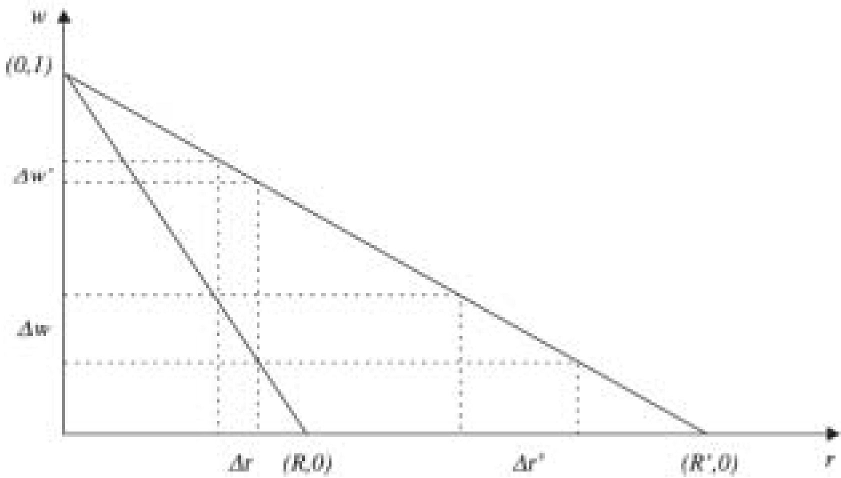
$$K = (1 - w_1)/r_1 \tag{7.1}$$

Lo que corresponde a la tangente del ángulo α formado por el eje horizontal y la recta que atraviesa por los puntos $(r_1, 1)$ y $(0, w_1)$ como se ilustra en la Figura 7. Ahora bien, este ángulo sería el mismo (β) para todos los valores de r si la gráfica de $w(r)$ fuera el segmento $[(0,1),(R,0)]$.

Por este motivo, en la medida en la que la gráfica de $w(r)$ se acerque a la diagonal señalada, los efectos de las variaciones en el nivel de r sobre K serán más pequeñas.

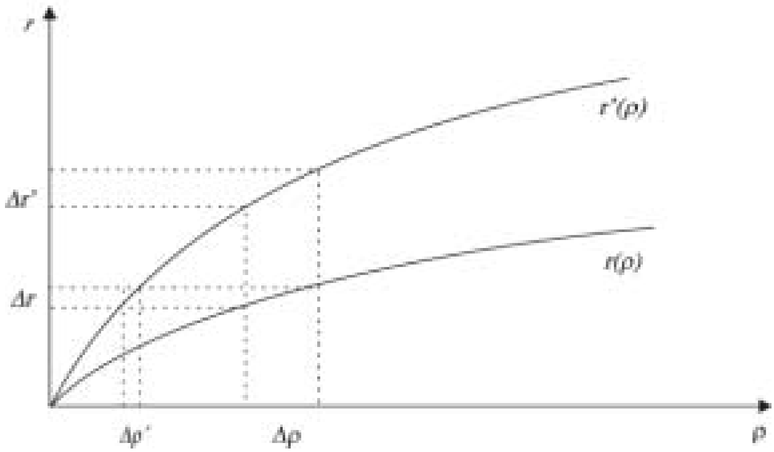
b) Conforme aumenta la productividad, una misma variación de w (Δw) causará cambios cada vez más grandes en el valor de r, mientras que la misma variación de r (Δr) producirá cambios cada vez más pequeños en el valor de w. Véase la Figura 8.

Figura 8



c) El cambio sobre *r* ocasionado por la misma variación de ρ $(\Delta\rho)$ será cada vez más grande conforme aumenta la productividad. Por su parte, la misma variación de *r* dará lugar a cambios cada vez menores en la tasa de explotación. Véase la Figura 9.

Figura 9



Finalmente, cabe señalar que la relación entre *r* y *w* no se ve afectada por los progresos técnicos, como se infiere de las ecuaciones (3.1) y (3.2).

8. Los progresos técnicos y el salario real

Representaremos con *s* a la fracción del producto neto que equivale a la unidad de salario. La relación entre *s* y *w* está dada por la fórmula siguiente:

$$s = w/\Sigma_k l_k \qquad (8.1)$$

El efecto de los cambios estudiados sobre esta variable se señala en la proposición siguiente.

Lema 1. Los progresos técnicos de tipos A y C producen un incremento en el valor de *s* correspondiente a cada nivel de *r*, mientras que con los de tipo B dicho valor permanece constante.

Prueba: de acuerdo con sus definiciones respectivas, los progresos de tipos A y B no alteran el nivel del empleo. Por otra parte, de acuerdo con la sección 5 los primeros aumentan el valor de *w*, correspondiente a cada nivel de *r* mientras que los segundos no lo alteran.

En consecuencia, se sigue de (8.1) que con los progresos de tipo A, *s* aumenta para cada nivel de *r*, mientras que con los de tipo B no se modifica.

Para estudiar el caso de un progreso de tipo C en una industria *h*, resulta conveniente sustituir, en (8.1), *w* por su equivalente en la ecuación (2.3). Se obtiene:

$$s = [\Sigma_k\, l_k / \Sigma_k\, c_k p_k] / \Sigma_k\, l_k$$

De lo cual se infiere que:

$$s = 1/ (\sum_{j}^{j \neq h} c_j p_j + c_h p_h) \qquad (8.2)$$

Cuando los precios están dados en unidades de salario.

De acuerdo con el Teorema 2, el precio del bien *h* disminuye como consecuencia de la disminución en la cantidad de trabajo utilizada en la rama *h*, lo que implica que $c_h p_h$ disminuye si se mantiene constante *r*. Por otra parte, según el mismo teorema, los precios restantes disminuyen o bien permanecen constantes, por lo que ocurre igual con el primer término del denominador de (8.2), lo cual trae como consecuencia el crecimiento de *s*.

Por otra parte, es conveniente representar al producto neto mediante el vector $(c_1, c_2,...,c_n)$ que contiene las cantidades de cada bien producidas en excedente. Definiremos el salario real como la canasta de bienes que se obtiene al multiplicar este vector por *s*, es decir:

$$s(c_1, c_2,...,c_n) \qquad (8.3)$$

De esta manera, el salario real es un conjunto de bienes equivalente al poder adquisitivo del salario. El efecto de los progresos técnicos sobre este conjunto queda establecido en la proposición siguiente.

Teorema 4. Siempre que se introduce un progreso técnico aumenta el salario real correspondiente a cada nivel de *r*.

Prueba: de acuerdo con el Lema 1, *s* puede aumentar o bien permanecer constante como consecuencia del progreso técnico.

Ahora bien, *s* aumenta sólo con los progresos técnicos de tipos A y C, de los cuales los primeros ocasionan también que aumente el excedente de una mercancía sin que los demás se modifiquen, mientras que con los segundos permanece constante el producto neto. Por lo tanto, de acuerdo con (8.3) cuando *s* aumenta también aumenta el salario real.

Por otra parte, cuando se introduce un progreso técnico de tipo B, que es el único caso en el que *s* permanece constante, aumenta al menos una de las cantidades de bienes que integran el producto neto sin que las demás se alteren. De esta manera, de acuerdo con (8.3), aumenta también el salario real.

Cabe señalar que seleccionamos una definición del salario real a nuestro parecer adecuada para identificar el efecto que sobre él tiene el progreso técnico. Ya que este último afecta necesariamente el precio de al menos uno de los bienes que forman parte del producto neto y afecta también a cualquier parte fraccionaria del mismo.

Sin embargo, se puede definir el salario real como el poder de compra del mismo, sobre cualquier conjunto de bienes escogido arbitrariamente. De esta forma, es posible que se presente en las dos situaciones siguientes.

Si la canasta elegida incluye al menos un bien en cuya producción participa (en forma directa o indirectamente) la industria en donde la productividad aumentó, se tendrá un incremento en el salario real, ello por los mismos argumentos que ya se expusieron.

En caso contrario ocurrirá un incremento en el salario real, siempre que *s* crezca, pero permanecerá idéntico cuando *s* no aumenta.

Conclusiones

Marx (1975) estudió los efectos de un incremento en la productividad sobre la relación entre la tasa de ganancia y la tasa de explotación. Llegó a la conclusión general de que la primera disminuye si se mantiene constante la segunda.

Partiendo de que la competencia fomenta continuamente la introducción de mejoras técnicas, Marx supuso que el desarrollo del capitalismo tendría como consecuencia necesaria la disminución permanente (salvo por incrementos inestables) de la tasa de ganancia si se mantenía constante la tasa de explotación.

Puesto que la motivación principal del capitalismo es la ganancia, esta situación haría disminuir a largo plazo el incentivo principal de la inversión. Por lo tanto, para evitar dicha disminución los capitalistas se verían orillados a incrementar la tasa de explotación, lo que agudizaría las tensiones sociales.

Las tendencias mencionadas apuntan hacia un agravamiento de las dificultades inherentes al sistema capitalista, sin que en el análisis marxista se identifiquen las causas que contrarresten suficientemente esta evolución. De esa forma, las mismas tendencias parecen conducir al sistema capitalista hacia una situación insostenible en la que se haría necesaria una reorganización social de gran profundidad. En efecto, de acuerdo con Marx:

> El desarrollo de las fuerzas productivas del trabajo social es lo que constituye la misión histórica y la razón de ser del capital. Es así precisamente como crea, sin proponérselo, las condiciones materiales para una forma más alta de producción.[7]

Cabe agregar que aún en la actualidad muchos autores de inspiración marxista colocan esta ley en la base de sus análisis sobre el desarrollo y las crisis de las economías capitalistas. Aunque también algunos de ellos tienen posiciones críticas al respecto.[8]

Los resultados de las secciones anteriores nos permiten restringir significativamente las posibilidades de validez de esta ley. En efecto, dentro de los límites del modelo y de los cambios técnicos estudiados ocurre más bien lo contrario a lo que ella establece.

Para mostrar lo anterior retomaremos los resultados establecidos para cada tipo de cambio técnico con relación a dicha ley:

Cambios de tipo A: en este caso, ocurre exactamente lo contrario a lo postulado por la ley, ya que, si se mantiene constante la tasa de explotación, el progreso técnico ocasiona un aumento en la tasa de ganancia y en el salario real.

De manera equivalente, se puede afirmar que si se mantiene constante la tasa de ganancia, el salario real aumenta y la tasa de explotación disminuye.

Cambios de tipo B: con este tipo de cambios no se afecta la relación entre las tasas de ganancia y de explotación. Sin embargo, en este caso también aumenta el salario real.

Cambios de tipo C: en este caso puede ocurrir una disminución en la tasa de ganancia que corresponde a un nivel dado (o a cada nivel dado) de la tasa de

[7] Marx (1985: 256, t. III).

[8] La literatura sobre este tema es cuantiosa. Dentro del Marxismo se encuentra una opinión crítica en Sweezy (1987) y una crítica neoricardiana en Okisho (1961).

explotación. De manera equivalente, se puede decir que para mantener la tasa de ganancia es necesario incrementar la tasa de explotación.

Este es el único caso en el que el efecto previsto por Marx se ve confirmado. Por ello conviene recordar algunos resultados que permiten otorgar a este caso una significación distinta a la que Marx le atribuye.

a) El efecto señalado no se da necesariamente con todos los progresos técnicos de tipo C. Con algunos de ellos ocurre lo contrario, es decir, aumenta la tasa de ganancia correspondiente a cada nivel de la tasa de explotación. Por otra parte, un mismo cambio de tipo C puede causar un incremento en la tasa de ganancia correspondiente a un cierto nivel de la tasa de explotación mientras que ocasiona lo contrario para otro nivel de esta tasa, como se muestra en el Ejemplo 5.

b) Según el Teorema 3, para cada nivel dado de la tasa de explotación, la de ganancia queda comprendida dentro del intervalo presentado en (6.2).

Si ρ se mantiene constante los cambios de tipo C pueden llevar a r hacia el límite inferior de este intervalo. Sin embargo, los cambios de tipo A hacen aumentar este límite y también, eventualmente, el límite superior. Además, estos incrementos no están acotados superiormente.

De acuerdo con lo anterior, si consideramos una situación en la que se introducen continuamente los distintos tipos de progresos técnicos, se da un incremento en el valor de r correspondiente a cada nivel de ρ, como se ilustra con el Ejemplo 7.

c) Siempre que se introduce un progreso técnico de tipo C también se incrementa el salario real correspondiente a cada nivel de r. Aun en el caso en el que, para mantener constante la tasa de ganancia, se requiera aumentar la tasa de explotación.

Esto significa que al aumentar dicha tasa no se agudiza necesariamente el conflicto de intereses entre trabajadores y capitalistas.

Los progresos técnicos aumentan siempre el salario real, incrementando o bien dejando inalterada la tasa de ganancia. De manera complementaria se puede decir que, si se mantiene constante el salario real, los progresos técnicos aumentan siempre la tasa de ganancia (para $r \varepsilon]0,R[$).

d) Los cambios de tipo C pueden afectar los intereses de una parte de los asalariados, en el caso de que su implementación provoque la pérdida del empleo. No es difícil verificar que lo mismo ocurre necesariamente con los otros tipos de cambios técnicos, si al introducirlos la demanda de cada tipo de bien permanece constante.

Esta consecuencia del progreso técnico es indudablemente de gran importancia.[9] Sin embargo, no tiene que ser abordada necesariamente con relación a la evaluación de la ley comentada en esta sección.

Marx aclaró que ella se refiere a las consecuencias de los progresos técnicos sobre la relación entre las tasas de explotación y de ganancia, y no al efecto de aquellos sobre el volumen del empleo. Para verificar esto, Marx considera una situación en la que se mantienen constantes el volumen del empleo y la tasa de explotación. Al crecer las fuerzas productivas se incrementa la producción, por lo que crece también la “masa del capital” (cantidad física de medios de producción). Considerando la relación entre el volumen de plusvalía y el valor de esta masa, señala:

> Esta proporción y, por lo tanto, la cuota de ganancia disminuyen, aunque el capital siga disponiendo de la misma masa de trabajo sobrante. La proporción cambia, no porque disminuya la masa de trabajo vivo, sino porque aumenta la masa de trabajo materializado puesta en movimiento por ella. La disminución es relativa, no absoluta, y no tiene en realidad nada que ver con la magnitud absoluta del trabajo y del trabajo sobrante puesto en movimiento. La baja de la cuota de ganancia no obedece a un descenso absoluto, sino a un descenso puramente relativo de la parte variable del capital total, es decir a su descenso comparado con el del capital constante.[10]

Por otra parte, cabe agregar que para Marx el crecimiento de la productividad tiende más bien a incrementar el volumen del empleo. En efecto, de acuerdo con él:

> El mismo desarrollo de la fuerza productiva del trabajo social, las mismas leyes que se traducen en la baja relativa del capital variable con respecto al capital total y en el consiguiente ritmo acelerado de la acumulación, mientras que, de otra parte, la acumulación constituye de rechazo el punto de partida para el ulterior desarrollo de la fuerza productiva y el ulterior descenso relativo del capital variable; éste mismo desarrollo se traduce, prescindiendo de fluctuaciones momentáneas, en el aumento creciente de la fuerza de trabajo total empleada y en el aumento continuo de la masa absoluta de la plusvalía, y por consiguiente, de la ganancia.[11]

[9] Véase por ejemplo Rifkin (1995).
[10] Marx (1985: 218, t. III).
[11] Marx (1985: 221, t. III).

Apéndice

A.1. Demostración del Teorema 2

Si el progreso técnico consiste en el aumento del número de unidades que se producen de algún bien, se divide por este número la ecuación correspondiente. Para distinguir las variables involucradas antes y después del cambio, podemos ahora escribir el sistema (1.1), después del cambio en la productividad, de la manera siguiente:

$$p_k' = \Sigma_j\, a_{kj}'p_j'\,(1 + r) + l_k' = p_k' \qquad k = 1,2,\ldots,n \tag{A.1}$$

De acuerdo con las definiciones se verifica que:

$$a_{kj}' \leq a_{kj} \;\forall\; (k,j) \text{ y } l_k' \leq l_k \;\forall\; k \tag{A.2}$$

y la desigualdad se cumple al menos para una pareja (k,j) y/o para algún k.

Sea d un bien para el cual se verifica $p_d'/\,p_d \oplus p_j'/\,p_j \;\forall\; j$. Probaremos primero que $p_d'/\,p_d \leq 1$, con este fin partiremos de la ecuación correspondiente a este bien antes del cambio. Al multiplicar ambos lados de ésta por $p_d'/\,p_d$ se obtiene:

$$\begin{gathered}(p_d'/\,p_d)p_d = (p_d'/\,p_d)[\Sigma_j\, a_{dj}p_j\,(1 + r) + l_d\,] \\ \oplus\, \Sigma_j\, a_{dj}(p_j'/\,p_j)p_j\,(1 + r) + (p_d'/\,p_d)\, l_d\,]\end{gathered}$$

De acuerdo con esto y con (A.2) se infiere que:

$$p_d' \oplus \Sigma_j\, a_{dj}'p_j'(1 + r) + (p_d'/\,p_d)l_d$$

y si $p_d'/\,p_d > 1$ entonces:

$$p_d' > \Sigma_j\, a_{dj}'p_j'(1 + r) + l_d'$$

Lo que contradice la ecuación de tipo (A.1) correspondiente a este bien. En consecuencia $p_d'/\,p_d \leq 1$, lo que significa que ningún precio crece con el cambio de productividad.

Demostraremos ahora que el bien d al que corresponde el progreso técnico bajó de precio. En efecto, se verifica que:

$$\Sigma_j\, a_{dj}'p_j'(1 + r) + l_d' < \Sigma_j\, a_{dj}p_j(1 + r) + l_d \tag{A.3}$$

ya que ningún coeficiente técnico y de acuerdo a la que se acaba de probar, ningún precio sube mientras que al menos uno de los coeficientes de los precios y/o la cantidad de trabajo utilizada en la industria *d* disminuye. En consecuencia $p_d' < p_d$.

Si *d* es un bien en cuya producción participa de manera directa la industria que incrementó su productividad, se verifica también que $p_d'/p_d < 1$. En efecto, se valida la ecuación de tipo (A.3) correspondiente a este bien, ya que al menos un precio baja como consecuencia del cambio, mientras que ningún precio y ningún coeficiente técnico aumenta.

Mediante un razonamiento análogo se demuestra que los precios de aquellos otros bienes, en cuya producción participa indirectamente la industria que incrementó su productividad, también bajan, mientras que los demás precios no cambian.

A.2. Demostración del Teorema 3

Demostraré sucesivamente los tres incisos del teorema:

a) Supondré que los primeros *m* bienes $(m \leq n)$ participan en la producción. Por hipótesis, (1.1) es productivo, lo que implica, de acuerdo con Hawkins y Simon (1949) que existe un conjunto de números $t_1, t_2, \ldots, t_m$, en donde $t_k > 0$ para cada *k*, tales que el sistema:

$$\Sigma_j\, t_k\, a_{kj} p_j (1 + r) + t_k\, l_k = t_k\, p_k \qquad k = 1,2,\ldots,m. \tag{A.4}$$

produce en excedente una unidad de cada uno de estos bienes. Sea $\alpha = máx\,(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, haciendo $u_k = t_k/\alpha$ para cada *k* obtenemos el sistema:

$$\Sigma_j\, u_k\, a_{kj} p_j (1 + r) + u_k\, l_k = u_k\, p_k \qquad k = 1,2,\ldots,m.$$

Procediendo a partir de este sistema como se hace en la sección 2 a partir de (1.1) se llega a la ecuación:

$$\Sigma_k\, \Sigma_j\, u_k\, a_{kj} p_j\, r + \Sigma_k\, u_k\, l_k = \Sigma_j (u_j - \Sigma_k\, u_k\, a_{kj}) p_j \tag{A.5}$$

Ahora bien, el segundo miembro de esta ecuación es igual a:

$$\Sigma_j (t_j/\alpha - \Sigma_k\, (t_k/\alpha) a_{kj}) p_j = (1/\alpha)\, \Sigma_j (t_j - \Sigma_k\, t_k a_{kj}) p_j = (1/\alpha)\, \Sigma_j p_j$$

Ya que el sistema (A.4) produce en excedente una unidad de cada bien.

Por otra parte, puesto que $u_k \leq 1$ para cada k, comparando (A.5) con (2.1) se establece que:

$$(1/a)\ \Sigma_j p_j \leq \Sigma_j\, c_j p_j \tag{A.6}$$

Sea $\beta = máx\ \{\ \Sigma_k a_{kj} /\ j = 1,2,...,n\}$. Entonces:

$$\Sigma_j\ \beta p_j \oplus \Sigma_j\ \Sigma_k\ a_{kj} p_j \tag{A.7}$$

Como consecuencia de (A.6) y de (A.7) se sigue que:

$$\Sigma_j\ \beta p_j /(1/\alpha)\ \Sigma_j p_j \oplus \Sigma_k\ \Sigma_j\ a_{kj} p_j / \Sigma_j\ c_j p_j = K$$

Ahora bien, el lado izquierdo de esta desigualdad es igual a $\beta\alpha$. De ahí que este número sea una cota superior para los valores de K.

Lo que procede demuestra que el conjunto de los valores de K generados al asignar sus valores posibles a las variables r y l_k $(k = 1,2,...,n)$ tiene una cota superior que es un número real positivo. Por otra parte, se sigue del Teorema 1 y de (2.2) que **K** adopta valores superiores a cero para cada nivel de las variables mencionadas.

De esta manera, **K** es la mínima cota superior de un conjunto de números superiores a cero que está acotado superiormente. Lo que implica que **K** es un número real superior a cero.

b) A partir de la ecuación (2.4) se infiere que:

$$r = (1 - w)/K \tag{A.8}$$

substituyendo en esta ecuación w por su equivalente en la ecuación (3.2) se obtiene:

$$r = [1 - 1/(\rho + 1)]/K$$

÷

$$= [\rho/(\rho + 1)]/K \tag{A.9}$$

por lo tanto, si se mantiene fija la tasa de explotación (o el valor equivalente de w) y disminuyen las cantidades de trabajo utilizadas, la tasa de ganancia también lo hará solamente si aumenta el calor del capital. De esta forma, su valor mínimo estará acotado inferiormente, de acuerdo con (A.8) y (A.9) por el valor máximo que pueda alcanzar *K*.

Substituyendo ahora *K* por **K** en las ecuaciones mencionadas se demuestra el inciso b).

c) Primero se demostrará que ningún cambio de tipo A aumenta el valor de **K**:

Dados los valores de r y l_k $(k = 1,2,...,n)$, un cambio de tipo A aumenta el valor de *w*, de acuerdo con la sección 5. Esto implica, de acuerdo con la ecuación (7.1), que *K* disminuye.

En consecuencia, un cambio de tipo A no aumenta el valor de *K* para ninguna de las colecciones posibles formadas por los valores de las variables *r* y l_k $(k = 1,2,...,n)$. No aumenta, por lo tanto, ninguno de los valores posibles de *K*, lo que implica que tampoco lo hace la mínima cota superior del conjunto formado por ellos.

Por otra parte, un cambio de este tipo puede disminuir el valor de **K**, como se demuestra en el ejemplo 6.

Finalmente, puede ocurrir que uno de estos cambios no afecte el valor de **K**, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8. Considérese el sistema:

$$\begin{aligned} &p_1(1 + r) + 1 = up_1 \\ &p_1(1 + r) + p_2(1 + r) + 1 = (3/2)p_2 \end{aligned} \qquad \text{(A.10)}$$

En este sistema $R = {}^\circ$ y u es una variable que puede adoptar cualquier valor real superior a 3. El valor de *K* se determina por la fórmula siguiente:

$$\begin{aligned} K &= (2p_1 + p_2)/[(u - 2)p_1 + (1/2)p_2 \\ &= (2s + 1)/[(u - 2)\sigma + (1/2)] \end{aligned} \qquad \text{(A.11)}$$

en la cual $\sigma = p_1/p_2$. Para establecer el valor de **K**, primero mostraré que *K* es una función decreciente de σ.

En efecto:

$$\begin{aligned} K'(\sigma) &= [2((u - 2)\sigma + {}^\circ) - (u - 2)(2\sigma + 1)]/[(u - 2)\sigma + {}^\circ]^2 \\ &= (3 - u)/[(u - 2)s + {}^\circ]^2 \end{aligned}$$

Dado que $u > 3$, se sigue que *K* aumenta siempre que σ disminuye, lo que a su vez ocurre siempre que *r* aumenta, como se mostrará a continuación:

De la primera ecuación de (A.10) se infiere que:

$$p_1 = 1/(u - 1 - r)$$

Substituyendo p_1 en la segunda ecuación del mismo sistema por el lado izquierdo de la ecuación anterior y simplificando, se establece que:

$$p_2 = u/(u - 1 - r)(1/2 - r)$$

Substituyendo ahora los dos precios por el lado izquierdo de la ecuación correspondiente en la definición de σ se establece, después de simplificar:

$$\sigma = (1/2 - r)/u \tag{A.12}$$

lo que demuestra que σ es una función decreciente de r.

De acuerdo con lo anterior, K aumenta siempre que r aumenta, por lo que la mínima cota superior para los valores de K es el límite de la función (A.11) cuando r tiende a R. Este límite es 2 ya que σ tiende a cero en este caso, de acuerdo con (A.12).

Ahora bien, si el incremento en la productividad consisten en el aumento de u, el valor de **K** permanece inalterado, ya que el análisis precedente es válido para cualquier u superior a 3.

Por otra parte, los cambios de tipo B no afectan el valor de w que corresponde a cada nivel de r por lo que, de acuerdo con (7.1), el valor de **K** no sufre ningún cambio.

Finalmente, los cambios de tipo C sí pueden afectar el valor del capital, como se señala en la sección anterior. Sin embargo, estos cambios ya fueron considerados en la definición de **K**.

d) El efecto de la disminución de **K** sobre el límite inferior de r se sigue inmediatamente de las fórmulas (6.1) y (6.2). Para mostrar que no hay una cota superior para el incremento que se produce basta con el ejemplo siguiente:

Considérese el cambio técnico que multiplica por $1/n$ (donde $n > 1$) cada coeficiente de (1.1) a excepción de las cantidades de trabajo.

Para cada nivel de r el valor de K estará determinado por la función

$$(1/n)\ \Sigma_k\ \Sigma_j\ a_{kj}p_j\ /[(1/n)\Sigma_{kj}\ a_{kj}p_j + \Sigma_k\ l_k]$$

que se obtiene substituyendo el denominador de (2.2) por el lado izquierdo de (2.1). Según el Teorema 2, los cambios técnicos no aumentan ningún precio, por este motivo el valor de K se acercará tanto a cero como se desee si n adopta valores suficientemente grandes.

En consecuencia, no existe cota superior para el crecimiento del límite inferior del intervalo (6.1).

Por otra parte, la tasa máxima de ganancia corresponde al nivel cero de w, por lo que debe satisfacer la ecuación $KR = 1$ de acuerdo con (2.4).

De esto se infiere que $R = 1/K$. Dado que K tiende a cero como límite inferior cuando n crece se sigue que R no tiene límite superior.

Referencias bibliográficas

Benítez, Alberto (1995), *Desequilibrio y precios de producción*, México: Siglo XXI.

Hawkins D. y H. A. Simon (1949). "Some conditions of macroeconomics stability" in Econometrica, núm. 17, pp. 245-8.

Marx, Carlos (1894) (1985). *El Capital*, México: FCE.

Neuman, J. Von (1945). "A model of general economic equilibrium" en *Review of economic studies*, XIII C1.

Okisho, N. (1961). "Technical progres and the rate of profits" en *Economic Review*, Kobe: Kobe University.

Rifkin, J. (1995). *The end of work*, New York: Tarcher-Putman.

Sraffa, P. (1960). *Production of commodities by means of commodities*, Cambridge: Cambridge University Press.

Sweezy P. M. (1942), (1987). *La teoría marxista del desarrollo capitalista*, México: FCE.

Takayama, A. (1985). *Mathematical economics*, Cambridge: Cambridge University Press.